Г.К.МУРАВИН, О.В.МУРАВИНА
МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, ГЕОМЕТРИЯ.
АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА.
11 КЛАСС. БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ.
МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебник «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 11 класс», к преподаванию по которому написано это методическое пособие, адресован учащимся одиннадцатых классов, изучающих математику на базовом уровне после изучения курса основной школы по учебникам алгебры разных авторских коллективов.

Базовый курс математики ориентирован на учащихся, которые не собираются продолжать изучение математики в высших учебных заведениях. Тем не менее, и в данном профиле обучение математике является важнейшей составляющей среднего общего образования и призвано сформировать представления о математике, как о части общечеловеческой культуры, универсальном языке науки, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления, дать основы логического, алгоритмического и математического мышления, научить применять полученные знания при решении различных задач.

При разработке учебников авторы дополнительно ставили перед собой цели развития личности школьников средствами математики, подготовку их к продолжению обучения и к самореализации в современном обществе.

Достижение этих целей предполагает:

– формирование мотивации изучения математики, готовности и способности учащихся к саморазвитию, личностному самоопределению, построению индивидуальной траектории в изучении предмета;

– формирование умения организации своей учебной деятельности посредством освоения личностных, познавательных, регулятивных и коммуникативных универсальных учебных действий;

– формирование специфических для математики и эффективных в обыденной жизни стилей мышления, в частности, логического, алгоритмического и эвристического;

– освоение в ходе изучения математики специфических видов деятельности, таких как построение математических моделей, выполнение инструментальных вычислений, овладение символическим языком предмета и др.;

– формирование умений представлять информацию в зависимости от поставленных задач в виде таблицы, схемы, графика, диаграммы;

– использование компьютерных программ и Интернета в обработке и поиске информации;

– овладение системой математических знаний, умений и навыков, необходимых для решения задач повседневной жизни и изучения смежных дисциплин;

– формирование научного мировоззрения;

– воспитание отношения к математике как к части общечеловеческой культуры, играющей особую роль в общественном развитии.

Методическая концепция обучения выражается в системно-деятельностном подходе и принципах обучения, которые сформулированы ниже.

Системно-деятельностный подход предполагает ориентацию на достижение цели и основного результата образования – развитие личности обучающегося на основе освоения универсальных учебных действий, познания и освоения мира, активной учебно-познавательной деятельности, формирование его готовности к саморазвитию и непрерывному образованию; разнообразие индивидуальных образовательных траекторий и индивидуального развития каждого обучающегося.

Принцип разделения трудностей. Математическая деятельность, которой должен овладеть школьник, является комплексной, состоящей из многих компонентов. Именно эта многокомпонентность является основной причиной испытываемых школьниками трудностей. Концентрация внимания на обучении отдельным компонентам делает материал доступнее.

Для осуществления принципа необходимо правильно и последовательно выбирать компоненты для обучения. Если некоторая математическая деятельность содержит в себе творческую и техническую компоненту, то согласно принципу разделения трудностей, они изучаются отдельно, а затем интегрируются.

Так при изучении в 11 классе элементов математического анализа, сначала школьники на примере нескольких найденных по определению производных знакомятся с основными типами заданий на применение производной. Это мотивирует последующее изучение техники дифференцирования.

Аналогичная идея заложена в методику изучения интегралов и первообразной. При изучении четвертой главы «Интеграл и первообразная» в пункте 12 «Площадь криволинейной трапеции» ученики знакомятся с понятиями криволинейной трапеции и ее площади, учатся записывать площади фигур, ограниченных заданными графиками функций в виде интеграла. Это мотивирует изучение следующего пункта, в котором школьники учатся находить первообразные элементарных функций и вычислять площади фигур с помощью формулы Ньютона-Лейбница.

Когда изучаемый материал носит алгоритмический характер, для отработки и осознания каждого шага алгоритма в учебнике составляется система творческих заданий. Каждое следующее задание в системе опирается на результат предыдущего, применяется сформированное умение, новое знание. Так постепенно школьниками усваивается весь алгоритм действия.

Принцип укрупнения дидактических единиц. Укрупненная дидактическая единица (УДЕ) – это клеточка учебного процесса, состоящая из логически различных элементов, обладающих информационной общностью. УДЕ обладает качествами системности и целостности, устойчивостью во времени и быстрым проявлением в памяти. Принцип УДЕ предполагает совместное изучение взаимосвязанных действий, операций, теорем. Принцип укрупнения дидактических единиц весьма эффективен, например, при изучении формул производных основных элементарных функций, отработке всех типов задач на применение производной во второй главе 11 класса.

Принцип опережающего формирования ориентировочной основы действия (ООД) заключается в формировании у школьника представления о цели, плане и средствах осуществления некоторого действия. Полная ООД обеспечивает систематически безошибочное выполнение действия в некотором диапазоне ситуаций. ООД составляется учениками совместно с учителем в ходе выполнения системы заданий. Отдельные этапы ООД включаются в опережающую систему упражнений, что дает возможность подготовить базу для изучения нового материала и увеличивает время на его усвоение.

Принципы позитивной педагогики заложены в основу сопровождения, поддержки и сотрудничества учителя с учеником. Создавая интеллектуальную атмосферу гуманистического образования, учителя формируют у учащихся критичность, здравый смысл и рациональность. В процессе обучения учитель воспитывает уважением, свободой, ответственностью и участием. В общении с учителем и товарищами по обучению передаются, усваиваются и вырабатываются приемы жизненного роста как цепь процедур самоидентификации, самоопределения, самоактуализации и самореализации в результате которых формируется творчески-позитивное отношение к себе, к социуму и к окружающему миру в целом, вырабатывается жизнестойкость, расширяются возможности и перспективы здоровой жизни полной радости и творчества.

Технология обучения строится на базе двух основных форм организации работы с классом. Одна из них фронтальная беседа, которая используется, в основном, при изучении нового материала и при работе с нестандартными заданиями. Другая – самостоятельная письменная работа, которая применяется, как правило, для формирования навыка решения стандартных задач.

Фронтальная беседа. Работа проводится в виде диалога учителя с классом, при этом учитель старается с помощью системы вопросов вовлечь в него как можно больше учащихся. Понятно, что наиболее простые вопросы адресуются ученикам, которые испытывают трудности в усвоении математики. Существенную роль в повышении эффективности фронтальной работы могут сыграть мультимедиа ресурсы. При этом желательно, чтобы компьютер в классе имел выход в Интернет.

Фронтальная беседа ни в коем случае не должна сводиться к работе с сильными учениками, когда большая часть класса не успевает следить даже за развитием сюжета. Поэтому желательно заранее планировать, кому из учащихся, какой вопрос задать, или, по крайней мере, заготовить достаточное количество простых вопросов. За активное участие в работе учеников необходимо стимулировать отметками или похвалой.

При работе с новым материалом учитель может делать записи на классной доске, однако, ученики далеко не всегда должны их дублировать в своих тетрадях. В большинстве случаев, когда рассматривается новый тип задач, аналогичный материал есть в учебнике. Но главная причина заключается в том, что ученики не в состоянии разделять свое внимание между несколькими видами деятельности, поэтому в каждый момент урока ученик должен заниматься чем-то одним: внимательно слушать, обдумывать, устно вычислять, сравнивать, переписывать с доски или что-то выполнять в тетради. Учитель же должен своевременно переключать школьников с одного вида деятельности на другой, помня, что они, как правило, не могут больше 7-10 минут заниматься одной деятельностью.

Вернемся к проблеме переписывания с доски. Если учитель считает, что какие-то записи должны оказаться в ученических тетрадях, то после объяснения логически законченного блока материала ему следует специально выделить для этого время.

Письменная самостоятельная работа. Непременное требование, которому должна удовлетворять организация самостоятельной работы учащихся – информация о ее продолжительности до начала работы и анализ результатов непосредственно после ее окончания. Конечно, глубина анализа может быть различной, однако каждый ученик, закончив работу, как минимум, должен знать, какую ее часть он выполнил верно, и в чем допустил ошибку.

Крайне желательно, чтобы в классе была достаточно большая классная доска, оборудованная «крыльями». Можно вызывать одного или двух школьников выполнять самостоятельную работу за крыльями доски скрытно от остальных учащихся, а после выполнения работы использовать решения на крыльях для проверки и обсуждения результатов работы. С этой целью можно также использовать мультимедийный проектор или интерактивную доску.

Требование немедленного контроля заставляет несколько иначе взглянуть на домашнюю работу школьников, а также на организацию контрольных работ. Так, в частности, не следует задавать на дом материал алгоритмического характера, пока учениками не усвоены соответствующие алгоритмы, поскольку даже констатация расхождения полученного ответа с ответом в учебнике может оказаться недостаточной для отыскания ошибочного шага решения. Можно предложить простое и эффективное решение проблемы домашнего задания. Всем ученикам предлагается дома вернуться к разобранным в классе заданиям самостоятельных работ и постараться повторно выполнить те, в которых ими были допущены ошибки. Понятно, что проверять следует не переписывание этих заданий, а умение их выполнять. Проверку домашнего задания иногда полезно осуществлять с помощью самостоятельной работы в двух вариантах, задания которых аналогичны тем, которые должны были быть разобраны школьниками дома. Такие самостоятельные работы выборочно или тотально оцениваются. Заметим, что школьники, которые научились решать задачи того или иного типа на уроке, могут заняться дома чем-нибудь более для себя полезным.

Можно, время от времени, дополнительно предлагать школьникам различные нестандартные, творческие задания, выполнение которых должно поощряться, а отказ от выполнения не должен наказываться.

Кроме этих основных форм, конечно, имеют место и другие хорошо известные виды учебной работы, такие как устные упражнения, математические диктанты, самостоятельная работа с учебником, парные самостоятельные работы и т.д.

Эффективность работы существенно повысится, если, рассмотрев любой логически завершенный блок материала (вывод формулы, составление уравнения по тексту задачи, решение примера, правильное решение заданий самостоятельной работы, чтение и обсуждение фрагмента учебника и т.п.), предложить школьникам полминуты молча подумать о том, что важное и новое для себя они из этого блока узнали, в чем заключалась их ошибка и т.п., т. е. еще раз прокрутить этот блок материала в своем сознании.

Говоря о технологии, мы советуем учителю перейти в тематическом контроле знаний школьников на форму дифференцированного зачета (зачета с выставлением отметки). Зачет сдается по материалу главы, причем зачетные вопросы и задания могут быть составлены из контрольных вопросов и заданий, которыми завершается каждый пункт учебника. А допуском к зачету может являться выполненная школьником домашняя контрольная работа к главе. Кстати, выполнение домашней контрольной работы ученик не должен оттягивать на последний день изучения материала главы, а выполнять из нее задания по ходу изучения материала. Для допуска к зачету достаточно выполнить задания первого уровня. В методических рекомендациях приведены примерные задания письменной и устной частей зачета, а также контрольные работы.

В тематическом планировании указано время либо на зачет, либо на контрольную работу. При зачетной форме контроля можно разрешить желающим школьникам вместо зачета написать контрольную работу. Кроме того, учитель может по одним главам провести зачеты, а по другим – контрольные работы. Подчеркнем, что уровень требований учитель определяет, исходя из реальной подготовки и способностей класса.

Упомянув о подготовке и способностях, заметим, что довольно часто в классах базового уровня оказывается по несколько учащихся с достаточно высоким уровнем математической подготовки и мотивации. Полагаем, что им будет полезно приобрести наши учебники углубленного уровня, в которых при сохранении той же последовательности изучения материала, что и в учебнике базового уровня, рассматриваются дополнительные вопросы и имеются более трудные задания.

Особенности построения учебно-методического комплекса (УМК) обеспечивают достижение выпускниками старшей школы следующих личностных, метапредметных и предметных результатов.

В личностных результатах сформированность:

– целостного мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки математики и общественной практики ее применения;

– основ саморазвития и самовоспитания в соответствии с общечеловеческими ценностями и идеалами гражданского общества; готовность и способность к самостоятельной, творческой и ответственной деятельности с применением методов математики;

– готовности и способности к образованию, в том числе самообразованию на протяжении всей жизни; сознательного отношения к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности на основе развитой мотивации учебной деятельности и личностного смысла изучения математики, заинтересованности в приобретении и расширении математических знаний и способов действий, осознанности в построении индивидуальной образовательной траектории;

– осознанного выбора будущей профессии, ориентированной в применении математических методов и возможностей реализации собственных жизненных планов; отношение к профессиональной деятельности как возможности участия в решении личных, общественных, государственных, общенациональных проблем;

– логического мышления: критичности (умение распознавать логически некорректные высказывания), креативности (собственная аргументация, опровержения, постановка задач, формулировка проблем, работа над исследовательским проектом и др.).

В метапредметных результатах сформированность:

– способности самостоятельно ставить цели учебной, исследовательской и проектной деятельности, планировать, осуществлять, контролировать и оценивать учебные действия в соответствии с поставленной задачей и условиями ее выполнения;

– умения самостоятельно планировать альтернативные пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач;

– умения находить необходимую информацию, критически оценивать и интерпретировать информацию в различных источниках (в справочниках, литературе, Интернете), представлять информацию в различной форме (словесной, табличной, графической, символической), обрабатывать, хранить и передавать информацию в соответствии с познавательными или коммуникативными задачами;

– навыков осуществления познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;

– умения продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности, эффективно разрешать конфликты;

– владения языковыми средствами – умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства;

– владение навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств их достижения.

В предметных результатах сформированность[1]:

– представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира;

– представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;

– умений применения методов доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;

[1] Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования / М-во образования и науки РФ. (Стандарты второго поколения). Приказ Министерства образования и науки РФ от 17.05.2012. №413, с.15.

– стандартных приёмов решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;

– представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа;

– представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;

Структура учебника

Учебник «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. Базовый уровень. 11 класс» содержит семь глав:

1. Непрерывность и пределы функции.
2. Производная функции.
3. Техника дифференцирования.
4. Интеграл и первообразная.
5. Элементы теории вероятностей и статистики.
6. Комплексные числа.

Во-первых, заметим, что изучение элементов математического анализа отнесено к последнему году обучения. Такое распределение вызвано недосказанностью материала элементарной математики в основной школе, создающей опасность разрыва основных содержательных линий элементами высшей математики, имеющими совершенно иную идеологию. Во-вторых, дойдя в 10 классе до границ применимости методов элементарной математики, можно предложить в 11 классе естественную мотивацию изучения элементов математического анализа.

Учебник 11 класса начинается с главы **«Непрерывность и пределы функции»**, в которой уточняется понятие непрерывности функции, ученики знакомятся с бесконечными и устранимыми разрывами функции, учатся вычислять пределы, строить асимптоты и применять полученные знания для построения графиков функций.

Изучение второй главы «**Производная функции**» до знакомства с формулами производных основных элементарных функций в отдельный блок продиктовано применением принципа разделения трудностей. В этой главе внимание школьников акцентируется на формировании понятия производной, применении производной к исследованию функций и построению графиков. Ученики в этой главе найдут по определению производные нескольких конкретных функций, которыми и будут пользоваться при выполнении всех типов заданий с использованием производной.

Технические вопросы, связанные с применением формул дифференцирования, рассматриваются в третьей главе «**Техника дифференцирования**». Повторяются все типы заданий, с которыми ученики встретились во второй главе, но расширяется список элементарных функций, производные которых они учатся находить. Кроме того, учащиеся познакомятся со второй производной и ее физическим и геометрическим смыслами.

При построении четвертой главы **«Интеграл и первообразная»** также используется принцип разделения трудностей. Ученики сначала отрабатывают понятия криволинейной трапеции, учатся при этом записывать площади фигур, ограниченных заданными графиками функций в виде интеграла. И только затем знакомятся правилами интегрирования и формулами первообразных и вычисляют площади.

Пятая глава **«Элементы теории вероятностей и статистики»** завершает линию комбинаторики, вероятности и статистики, которая изучалась в основной школе.

Шестая глава **«Комплексные числа»** завершает изучение числовой и алгебраической линии школьного курса. Ученики познакомятся с алгебраической формой записи комплексных чисел и с арифметическими действиями над ними.

В учебник включены дополнительные материалы: темы проектов, домашние контрольные работы, ответы, советы и решения, справочные материалы и предметный указатель, список дополнительной литературы и интернет-ресурсов.

Каждый пункт учебника включает объяснительный материал, который построен крупным блоком с разобранными примерами и образцами решений, историческими справками, системой упражнений и контрольными вопросами и заданиями.

Особое внимание при создании учебников для 10–11 классов уделено выстраиванию системы упражнений. Все задачи курса алгебры можно разделить на *стандартные*, умение решать которые в процессе обучения стараются довести до уровня навыков, и *нестандартные*, в решении которых ученикам необходимо проявлять элементы творчества, где процесс поиска и составления плана решения, пожалуй, даже более важен, чем ответ. Понятно, что такое деление задач зависит от программы и целей соответствующего курса, так некоторые задачи, стандартные при углубленном изучении математики, для базового курса заведомо являются нестандартными. В наших учебниках практически нет серий однообразных стандартных заданий, отличающихся только коэффициентами. Понятно, что это предполагает отказ от натаскивания учащихся на решение простейших типовых заданий, которое не оставляет времени для содержательных математических задач. При использовании наших учебников стандартные навыки, в основном, формируются в процессе выполнения более сложных и разнообразных заданий.

Задания в учебнике дифференцированы по своей дидактической и методической направленности. Система упражнений сплетена из заданий, представляющих три основные группы. К стандартным упражнениям относятся задания первых двух групп. Номера заданий первой группы не имеют специальных обозначений – эти задания определяют как бы нижнюю границу умений, которые необходимо выработать у школьников. Задания второй группы, отмеченные значком «°», хотя и несколько сложнее, чем задания первой группы, однако, в своей массе, не требуют от школьников особых интеллектуальных усилий. Эти задания должны обеспечить формирование обязательных умений.

Обычно задания первых двух групп выполняются школьниками самостоятельно с немедленным разбором полученных ими результатов. Мы рекомендуем перед этим рассмотреть задачу фронтально, формулируя и обсуждая план ее выполнения. Важно отметить, что при этом сама реализация плана зачастую окажется не нужна, или ее можно будет перенести в домашнее задание. Особенно эффективен такой прием при повторении больших блоков материала в условиях дефицита времени.

Значительную часть в системе упражнений составляют задания третьей группы, отмеченные значком «•». Эти задания нестандартные, их дидактическая функция – активизация мыслительной деятельности школьников. И здесь перед выполнением многих из них следует выработать и обсудить план решения. После чего они становятся посильными для большинства школьников.

Во всех случаях авторы стремились разгрузить задания от усложнений, не связанных с идеями решения. Так, в частности, большинство квадратных уравнений, которые придется решать старшеклассникам, имеют корнями числа 1, –1 или допускают несложный подбор корней по формулам Виета. Понятно, что за счет *технической* разгрузки заданий достигается значительная экономия времени.

В системе упражнений имеются также задания, которые не следует выполнять без калькулятора. Они отмечены значком: «▪». Если у большинства школьников имеются инженерные калькуляторы, эти задания можно включить в уроки. Поскольку в учебнике рассматриваются вычисления на калькуляторе, предоставляемом компьютерным пакетом «Windows», полезно изыскать возможность проведения одного-двух уроков математики в школьном компьютерном классе. На эти уроки можно вынести соответствующий материал учебника.

Некоторые задания могут показаться непривычно трудными по сравнению с обычным для большинства других учебников набором упражнений, особенно для базового уровня. Авторы исходили из того, что задания, при выполнении которых ученики не испытывают затруднений, практически бесполезны в плане развития мышления – приоритетном аспекте обучения математике. Важно, чтобы эти затруднения были преодолимы, и ученикам во́время предоставлялась помощь, особенно, если задания выполняются в домашней работе. В рекомендациях мы во многих случаях предлагаем учителю вопросы, подводящие к идее решения, а дома учащимся помогут довольно содержательные разделы «Ответы», «Советы» и «Решения». В этих разделах учтены многие случаи, в которых ученики обычно испытывают затруднения. Разделы дают дополнительные консультации по изучаемому материалу, и, что особенно важно, учащиеся получают их именно в тот момент, когда в них нуждаются. Конечно, некоторые ученики вместо самостоятельного выполнения заданий предпочтут просто разобрать и переписать их решения. Однако и в этом случае они, вероятно, чему-то научатся. Учитель должен продемонстрировать школьникам бессмысленность механического переписывания решений, отказавшись от выставления оценок за факт наличия (или отсутствия!) выполненного в тетради домашнего задания. Главное, чтобы школьники умели выполнять сами задания, что можно проверить, предложив, например, самостоятельную работу по мотивам домашнего задания.

Количество упражнений к пунктам учебника достаточно для изучения и закрепления материала, однако в наше пособие включены дополнительные задания для устной работы, математических диктантов, самостоятельных и контрольных работ, а также зачетов. В качестве дополнительного дидактического материала можно использовать различные пособия для подготовки к ЕГЭ. Нельзя не отметить, что все больше школьников имеет компьютеры с доступом в Интернет, а в сети огромное количество специализированных учебных ресурсов и бесплатных математических программ, среди которых мы упоминаем программу GeoGebra, позволяющую выполнять большое количество учебных заданий по алгебре и геометрии.

В наших учебниках задания, в которых целесообразно использовать пакеты компьютерных программ, отмечены специальным знаком. Но и при отсутствии специальных рекомендаций желательно при исследовании функции и построении их графиков проверять результаты с помощью графиков полученных с помощью компьютерных программ.

Интернет существенно облегчает применение такого вида самостоятельной работы школьников как проект. Работая над проектом, ученик находит и выстраивает материалы, как правило, расширяющие и углубляющие изложение учебника. Результатом может являться, например, компьютерная презентация, которую с интересом посмотрят не только учитель, но и одноклассники. Возможно, что над проектом будет работать не один учащийся, а группа учеников. Это особенно актуально в темах, где из-за недостатка учебного времени авторам учебника пришлось отказаться от включения многих полезных и интересных задач и исторических фактов.

И учебник, и методическое пособие созданы на основе занятий с учителями математики, много лет проводившихся авторами в Московском областном ИПК. Эта работа позволила разработать наиболее эффективные подходы к изучению как отдельных вопросов и тем, так и всего курса в целом, а также опробовать их в практике учителей.

В этом пособии мы постарались подробно рассмотреть вопросы организации и проведения конкретных уроков, что, как мы надеемся, сократит учителю время на подготовку к ним.

Творческим учителям мы, тем не менее, советуем предварительно обсудить с авторами свои идеи, например, в гостевой книге сайта http://muravin2007.narod.ru. На этом же сайте любой учитель может задать свой вопрос.

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Тематическое планирование является примерным. Оно реализует один из возможных подходов к распределению изучаемого материала, не носит обязательного характера и не исключает возможностей иного распределения учебного времени.

В тематическом планировании разделы основного содержания разбиты на темы в порядке их изучения в учебнике.

В базовом курсе на математику отводится 4 урока в неделю. Исходя из отношения объемов и востребованности изучаемого материла, три из этих четырех уроков следует выделить на изучение алгебры и начал математического анализа.

Особенностью тематического планирования является то, что в нем содержится описание возможных видов деятельности учащихся в процессе усвоения соответствующего содержания, направленных на достижение поставленных целей обучения. Это ориентирует учителя на усиление деятельностного подхода в обучении, на организацию разнообразной учебной деятельности, отвечающей современным психолого-педагогическим взглядам, на использование современных технологий.

11 класс (102 ч)

Содержание материала пункта учебника	Количество часов	Характеристика основных видов учебной деятельности обучающихся
Глава 1. Непрерывность и предел функции	**9**	
1. Непрерывность функции Непрерывность функции в точке и на промежутке. Решение неравенств методом интервалов. Точка разрыва. Разрыв функции: бесконечный и устранимый	3	Находить по графику бесконечные и устранимые разрывы. Распознавать непрерывные и разрывные функции. Устранять разрыв функции в точке. Решать неравенства методом интервалов. Строить графики функций с применением пакетов компьютерных программ, считывать информацию с графиков функций и использовать ее в познавательной и социальной практике
2. Предел функции Предел функции в точке. Связь между пределом и непрерывностью функции в точке. Определение непрерывности и предела функции на языке ε-δ. Доказательство непрерывности линейной функции	2	Вычислять предел функции в точке. Изображать схематически график, имеющий заданный предел в точке. Устанавливать истинность утверждений о непрерывности функций. Проводить обоснования о пределах и непрерывности функции

		на иллюстративном уровне. Решать неравенства методом интервалов
3. Асимптоты графика функции Уравнения вертикальной, горизонтальной и наклонной асимптот. Понятия бесконечного предела и предела на бесконечности. Правила вычисления пределов	3	Записывать уравнения вертикальных и горизонтальных асимптот. Формулировать определения непрерывности и предела функции в точке. Формулировать и применять правила вычисления пределов. Строить графики функций. Применять пакеты компьютерных программ для построения графиков функций. Составлять план выполнения задания. Обосновывать математические утверждения. Считывать информацию с графиков функций. Переводить записи с естественного языка на математический и обратно
Зачет или контрольная работа № 1	1	Контролировать и оценивать свою работу. Ставить цели на следующий этап обучения
Глава 2. Производная функции	**11**	
4. Касательная к графику функции Секущая и касательная к графику функции. Угловой коэффициент касательной. Уравнение касательной	3	Формулировать определение касательной к графику функции в точке. Строить касательную к графику функции и записывать ее уравнение с помощью углового коэффициента. Строить графики функций и касательные к ним с применением пакетов компьютерных программ
5. Производная и дифференциал функции Приращение аргумента и приращение функции. Производная и дифференциал функции. Дифференцирование. Физический смысл производной	4	Формулировать определение производной. Объяснять физический и геометрический смыслы производной. Вычислять приближенные значения функции. Находить производные линейной и квадратичной функций по определению. Записывать уравнение касательной по известной производной функции. Решать задачи с физическим содержанием: находить скорость движения тела, силу тока, кинетическую энергию и др. Доказывать, что одна функция является производной другой
6. Точки возрастания, убывания и экстремума функции Точки возрастания и убывания функции. Возрастание и убывание функции. Теорема Лагранжа.	3	Находить промежутки возрастания и убывания функции с помощью производной. Формулировать определения максимума и минимума функции, экстремума и критической

Условие монотонности функции. Максимум и минимум функции. Экстремум и критическая точка функции		точки функции. Находить точки максимума и минимума с помощью производной. Проводить исследование функции с помощью производной и строить ее график. Заполнять таблицу по результатам исследования функции. Находить ошибки в построениях графика функции. Устанавливать истинность утверждений о критических точках. Читать графики функций. Строить графики функций в тетради и с применением пакетов компьютерных программ
Зачет или контрольная работа № 2	1	Контролировать и оценивать свою работу. Ставить цели на следующий этап обучения
Глава 3. Техника дифференцирования	**22**	
7. Производная суммы, произведения и частного Правила нахождения производной суммы, произведения, частного функций. Формула нахождения производной степени	4	Формулировать и применять правила нахождения производной суммы, произведения, частного, степени: находить производную функции в точке; составлять уравнение касательной к графику функции в точке; решать задачи с физическим содержанием; промежутки монотонности и экстремумы функции. Строить график функции
8. Производная сложной функции Сложная функция. Внешняя и внутренняя функции. Производная сложной и неявной функций	2	Выделять в сложной функции внешнюю и внутреннюю функции. Формулировать правило нахождения производной сложной функции. Применять формулу производной сложной функции при ее исследовании и построении графика. Находить производные сложных и неявных функций. Строить графики сложных функций и касательные к ним с применением пакетов компьютерных программ
9. Формулы производных основных функций Определение числа *e* графическим способом и через предел последовательности. Производная показательной, степенной и логарифмической функций, тригонометрических и обратных им функций. Производная обратной функции	6	Проводить исследование изученных функций, строить к ним касательные, находить их приближенные значения. Решать задачи физического содержания о нахождении скорости радиоактивного распада, о скорости изменения силы тока и др. Находить производную обратной функции. Применять формулы и правила дифференцирования в исследовании функций на монотонность и

		экстремумы, в ситуациях, не требующих сложных преобразований
Контрольная работа № 3	1	Контролировать и оценивать свою работу. Ставить цели на следующий этап обучения
10. Наибольшее и наименьшее значения функции Наибольшее и наименьшее значения функции. Наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке	5	Использовать производные в задачах на нахождение наибольших и наименьших значений функций. Строить графики функций с применением пакетов компьютерных программ. Решать задачи с практическим, геометрическим и физическим содержанием на нахождение наибольших и наименьших значений
Проект «Задачи на максимум и минимум алгебраического, тригонометрического и геометрического содержания»		Искать, отбирать, анализировать, систематизировать и классифицировать информацию. Использовать различные источники информации для работы над проектом
11. Вторая производная Физический и геометрический смысл второй производной. Промежутки выпуклости и вогнутости и точки перегиба функций. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний	3	По графику определять выпуклость, вогнутость и точки перегиба функции. Проводить исследования с помощью второй производной на выпуклость, вогнутость и точки перегиба функции. Использовать первую и вторую производные в исследовании функций. Строить графики функций с применением пакетов компьютерных программ. Решать задачи физического содержания на нахождение скорости и ускорения движения тела
Проект «Выпуклость функции. Понятие выпуклости функции. Достаточное условие выпуклости. Применение выпуклости функций для сравнения основных средних: среднего арифметического, среднего геометрического, среднего гармонического и среднего квадратичного»		Искать, отбирать, анализировать, систематизировать и классифицировать информацию. Использовать различные источники информации для работы над проектом
Зачет или контрольная работа № 4	1	Контролировать и оценивать свою работу. Ставить цели на следующий этап обучения
Глава 4. Интеграл и первообразная	**11**	
12. Площадь криволинейной трапеции Криволинейная трапеция.	3	Формулировать определения криволинейной трапеции, интеграла. Изображать фигуру, площадь

Интегральная сумма. Интеграл. Площадь криволинейной трапеции. Формула Ньютона-Лейбница. Формула объема тела вращения. Геометрический и механический смысл интеграла		которой записана с помощью интеграла. Записывать площадь изображенной криволинейной трапеции с помощью интеграла. Записывать площадь фигуры с помощью суммы и разности интегралов. Записывать объем тела с помощью интеграла. Строить фигуру, ограниченную данными линиями в тетради и с применением пакетов компьютерных программ
13. Первообразная Первообразная. Приращение первообразной. Интегрирование. Основное свойство первообразных. Простейшие правила нахождения первообразных. Таблица первообразных основных функций	7	Формулировать определение первообразной функции. Проверять является ли одна функция первообразной для другой. По графику первообразной строить саму функцию. Формулировать и доказывать простейшие правила нахождения первообразной функции. Пользоваться таблицей первообразных основных функций при решении задач. Доказывать, что одна функция является первообразной для другой. Находить в простейших случаях первообразные функции. Применять интегралы для нахождения площадей криволинейных трапеций и объемов тел вращения. Решать с помощью интеграла задачи практического, геометрического и физического содержания приведенных в учебнике видов
Зачет или контрольная работа № 5	1	Контролировать и оценивать свою работу. Ставить цели на следующий этап обучения
Глава 5. Вероятность и статистика	**9**	
14. Сумма и произведение событий Формула вероятности. Условная вероятность. Сумма событий. Формула вероятности суммы событий. Вероятность суммы несовместных событий. Вероятность произведения независимых событий	4	Представлять информацию в виде таблиц, круговых и столбчатых диаграмм, в том числе с помощью компьютерных программ. Приводить примеры противоположных событий, зависимых и независимых событий. Использовать при решении задач свойства вероятностей противоположных событий. Записывать формулы вероятности суммы и произведения событий. Решать задачи на вычисление вероятности суммы и

		произведения событий
15. Понятие о статистике Среднее арифметическое, медиана и мода ряда. Дисперсия числового ряда. Математическое ожидание	4	Представлять информацию в виде таблиц, круговых и столбчатых диаграмм. Находить среднее арифметическое, моду, медиану, дисперсию и математическое ожидание числовых рядов. Приводить содержательные примеры использования средних значений, дисперсии и математического ожидания для описания данных
Проект «Естественно-научные приложения закона больших чисел, в том числе законов Менделя»		Искать, отбирать, анализировать, систематизировать и классифицировать информацию. Использовать различные источники информации для работы над проектом
Зачет или контрольная работа № 6	1	Контролировать и оценивать свою работу. Ставить цели на следующий этап обучения
Глава 6. Комплексные числа	**6**	
16. Формула корней кубического уравнения Решение уравнений высших степеней. Формула Кардано для решения кубических уравнений	1	Решать кубические уравнения по формуле Кардано
17. Действия с комплексными числами Понятие комплексного числа. Мнимая и действительная части комплексного числа. Сопряженные комплексные числа. Равенство комплексных чисел. Арифметические действия с комплексными числами в алгебраической форме. Основная теорема алгебры. Неразрешимость уравнений выше пятой степени в радикалах	4	Формулировать определение комплексного числа и равенства комплексных чисел. Формулировать основную теорему алгебры. Находить комплексные корни квадратных уравнений. Показывать выполнимость теоремы Виета для комплексных корней квадратного уравнения. Выполнять действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме
Проект «История развития понятия числа»		Искать, отбирать, анализировать, систематизировать и классифицировать информацию. Использовать различные источники информации для работы над проектом
Итоговая контрольная работа	1	Контролировать и оценивать свою работу. Ставить цели на следующий этап своей жизни

Резерв времени (подготовка к экзаменам)	**34**	
Итого	**102**	

МЕТОДИЧЕСКИЕ КОММЕНТАРИИ К ГЛАВАМ УЧЕБНИКА

ГЛАВА I
НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ПРЕДЕЛЫ ФУНКЦИИ

В первой главе учебника уточняется понятие непрерывности функции, ученики знакомятся с пределом функции, бесконечными и устранимыми разрывами, учатся вычислять пределы, находить уравнения асимптот и применять эти знания при построении графиков функций. Школьники повторяют метод интервалов решения неравенств и преобразования графиков.

1. Непрерывность функций (3 ч)

В результате изучения пункта ученики уточнят представление о непрерывности функции, о бесконечном и устранимом разрывах функции, научатся устранять разрывы функций, познакомятся с функцией сигнум. Кроме того, повторят метод интервалов для решения неравенств.

Предметные результаты обучения: находить по графику бесконечные и устранимые разрывы; распознавать непрерывные и разрывные функции; решать неравенства методом интервалов; устранять разрыв функции в точке.

Метапредметные результаты обучения: строить графики функций с применением пакетов компьютерных программ; считывать информацию с графиков функций и использовать ее в познавательной и социальной практике.

Личностные результаты обучения: обосновывать собственную точку зрения.

Цель первого урока: формирование понятий непрерывности и разрывов функции; закрепление умения школьников решать неравенства методом интервалов.

Комментарии. Интуитивные представления о непрерывности функций формировались у школьников, начиная уже с 7 класса. Курс 11 класса естественно начать с повторения этих представлений о непрерывности и приложении их к решению неравенств методом интервалов. Повторение этого типа задач достаточно актуально, поскольку учащимся в дальнейшем неоднократно предстоит решать методом интервалов различные неравенства, в частности, при исследовании функции на монотонность и экстремумы с помощью производной.

Материал рассматривается с опорой на учебник. По рисункам учебника учитель организует обсуждение материала со школьниками. Первый рисунок никаких затруднений у учеников не вызовет. В качестве примера непрерывной функции выбрана хорошо известная школьникам функция $y = x^2$. А вот функция $y = \text{sign}\ x$ на рисунке 2, почти наверняка потребует обсуждения, так как кусочно-заданные функции встречались школьникам редко. Затем ученики переходят к функциям в № 1, причем на этом этапе непрерывными они считают функции, графики которых представляют собой непрерывные линии. Так, например, функция $y = \frac{1}{x}$, график которой состоит из двух ветвей, рассматривается ими, как имеющая разрыв в точке $x = 0$.

Задания в № 1 (1–3, 7, 8) выполняются устно. При этом обращается внимание на области определения функций, а также на наличие у их графиков вертикальных асимптот. При рассмотрении кусочно-заданных функций в № 1 (4, 9) ученики должны понять, что проверять следует совпадение или несовпадение «граничных» значений функций, т.е. значений, на границах указанных промежутков определения функции. Так, например, в № 1 (9) значения функции $y = x^2$ и $y = x + 2$ при $x = -1$ совпадают, а значения $y = x^2$ и $y = 5 - x$ при $x = 2$ – нет. Значит, эта функция разрывная в точке $x = 2$. Рассуждения можно подкрепить построением графиков функций, которые учащиеся выполняют самостоятельно в тетрадях, а один или два ученика – на крыльях доски. Затем графики сверяются.

После выполнения № 1 следует перейти к повторению метода интервалов для решения неравенств. При разборе решения примера 1 в учебнике нужно обратить внимание на выделение промежутков и на обозначение их границ. В учебнике границы изображаются светлыми или черными точками (в зависимости от того, входит ли соответствующее число во множество решений). Можно вместо светлых точек использовать крестики, как бы вычеркивающие точку. Вместо решения неравенства, приведенного в учебнике, можно рассмотреть более простое неравенство. В этом случае, конечно, решение придется записывать на доске.

З а д а н и е. Решите неравенство $\frac{\lg x - 1}{(x-15)(x-3)} > 0.$

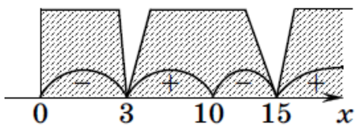
Р е ш е н и е. Решим неравенство методом интервалов.

Найдем ОДЗ неравенства, границы интервалов *знакопостоянства* функции $y = \frac{\lg x - 1}{(x-15)(x-3)}$ и отметим их на координатной прямой.

ОДЗ: $x > 0$, кроме $x = 3$ и $x = 15$.

Границы интервалов: 0, 3, 10, 15.

Найдем знаки функции на найденных интервалах (рис.1).



(Правка рисунка, кружки белые и черные)

Рис. 1

О т в е т: (3; 10) ∪ (15; +∞).

Следует проследить, чтобы ученики не делали записей в тетради в процессе обсуждения и решения на доске. Записать решение в тетрадь они смогут в специально выделенное время после завершения решения.

Пример функции непрерывной на отрезке $[0; x]$, график которой изображен на рисунке 4 в учебнике, позволяет проиллюстрировать еще одно важное свойство непрерывной функций – пробегание ею всех промежуточных значений. На промежутке $[0; x]$ функция возрастает и при этом она по одному разу принимает каждое значение из промежутка $[f(0); f(x)]$. Этим она отличается от функции, разрывной в точке x_0, на рисунке 5. Свойство принимать все промежуточные значения, и в частности, значение, равное нулю – *нуль функции*, используется в № 2. На уроке полезно сформулировать алгоритм отыскания приближенного значения корня.

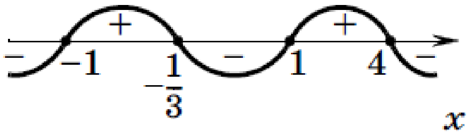
Затем в № 3 (2, 3) закрепляется метод интервалов.

№ 3 (3). Р е ш е н и е. Решим неравенство $\frac{3x^2-2x-1}{4+3x-x^2}>0$. При решении дробно-рациональных неравенств можно не упоминать ОДЗ, а говорить о границах интервалов знакопостоянства функции.

(1) Найдем границы интервалов знакопостоянства функции $y=\frac{3x^2-2x-1}{4+3x-x^2}$.

$x_1 = 1,\ x_2 = -\frac{1}{3}, x_3 = -1,\ x_4 = 4.$

(2) Определим знаки функции y на найденных интервалах (рис. 2).



(Правка рисунка, кружки белые и черные)

Рис. 2

О т в е т: $-1 < x < -\frac{1}{3},\ 1 < x < 4.$

В завершение урока школьники фронтально выполняют № 7 (2), т.е. подбирают для каждого графика соответствующую ему функцию и повторяют некоторые из преобразований графиков, изученных в 10 классе. Так, например, в заданиях № 7 (в, г) используется симметрия относительно оси ординат. Повторение преобразований завершается рассмотрением № 5.

Домашнее задание. п. 1, № 3 (1, 4), 4, 6 (1, 2). Для желающих №2, который решается с помощью калькулятора и советов учебника.

Цель второго урока: изучение понятия непрерывности функции в точке и доказательства непрерывности функции в точке.

Комментарии. В начале урока, можно предложить школьникам выполнить следующее задание.

З а д а н и е 1. Решите неравенство $(|x| - 2) \cdot (|x| - 3) > 0$.

Затем сравнить его с первым неравенством домашнего задания. После чего полезно ответить фронтально на вопросы № 5, рассмотренного на первом уроке.

После этого начинается изучение основной темы урока. Новым является сам подход к понятию непрерывности через рассмотрение поведения графика функции в ближайшей окрестности точки. На уже знакомых по предыдущему уроку рисунках 4 и 5 рассматривается точка с абсциссой x_0.

Точка M, двигаясь по графику к точке M_0, на рисунке 4 может оказаться как угодно близко к точке M_0. При этом, приближая абсциссу x точки M графика функции к x_0 можно получить ординату $f(x)$ точки M как угодно мало отличающуюся от ординаты $f(x_0)$ точки M_0. В базовом курсе мы стараемся сформировать образное представление непрерывности функции в точке. Строгому определению, на наш взгляд, место в углубленном курсе. Важно, чтобы школьники знали определение непрерывности функции на промежутке. Кроме того, в дальнейшем часто будет использоваться факт непрерывности элементарных функций во всех точках их областей определения. Если у учащихся возникнет желание уточнить, какие функции называют элементарными, то можно сказать, что это те функции, которые можно задать конечной формулой. А вот большинство кусочно-заданных функций, например, $y = \operatorname{sign} x$, элементарными не являются.

После упоминания об элементарных функциях по учебнику рассматриваются и сравниваются рисунки 6 и 7, с помощью которых иллюстрируются понятия *бесконечного* и *устранимого разрыва*. Затем разбирается пример 2, который можно заменить более простым примером.

З а д а н и е 2. Устраните разрыв у функции $y = \dfrac{3x^2 + 7x - 10}{x - 1}$.

Р е ш е н и е. $\dfrac{3x^2 + 7x - 10}{x - 1} = \dfrac{(3x + 10)(x - 1)}{x - 1} = 3x + 10.$

Следует обратить внимание школьников на отыскание корней трехчлена. Полезно сначала проверить, не является ли корнем $x = 1$ или $x = -1$.

В заключение урока школьники фронтально обсуждают № 16.

Домашнее задание. п.1, № 10, 11.

Цель третьего урока: закрепление материала пункта.

Комментарии. В качестве проверки домашнего задания можно предложить самостоятельную работу.

Самостоятельная работа

Вариант 1

Устраните разрыв и постройте график функции $y = \dfrac{3x^2 + 2x - 5}{3x + 5}$.

Вариант 2

Устраните разрыв и постройте график функции $y = \dfrac{2x^2 - 3x - 5}{2x - 5}$.

Ответы к самостоятельной работе

Вариант 1. $y = x - 1$. **Вариант 2.** $y = x + 1$.

После проверки самостоятельной работы проводится фронтальная беседа с учениками о том, как они понимают непрерывность функции в точке, на промежутке, на области определения, какие функции являются элементарными. Следует предложить учащимся привести пример неэлементарной функции (например, кусочно-заданной). Какое свойство непрерывной функции используется в методе интервалов? [Сохранение знака между двумя соседними нулями.]. Затем можно предложить дополнительное задание.

З а д а н и е. Решите неравенство $\dfrac{x^2+x-2}{1-2x} \ge 0$.

При обсуждении решения обратить внимание школьников на поиск корней квадратного трехчлена, на то, что неравенство является нестрогим, что приводит к необходимости по-разному отмечать границы промежутков знакопостоянства.

Затем предлагается устная работа, функции из которой демонстрируются на доске, а сами вопросы зачитываются учителем. Ответ на прозвучавший вопрос ученики записывают в своей тетради, а затем ответы к каждому из трех блоков обсуждаются.

Устная работа

1. Даны функции:

а) $y = x^2 + 4x + 4;$ в) $y = \sin x;$ д) $y = \sqrt{x+3};$ ж) $y = \dfrac{-2x+2}{x-1};$

б) $y = \dfrac{1}{x^2};$ г) $y = \mathrm{ctg} x;$ е) $y = \dfrac{3x^2 - 5x^3}{2x^2};$ з) $y = \dfrac{x}{3^x}$.

1) У каких функций нет разрыва?

2) Какие функции имеют бесконечный разрыв? Назовите точки разрыва каждой такой функции.

3)Какие функции имеют устранимый разрыв? Устраните разрыв у выделенных функций.

2. Даны кусочно-заданные функции:

а) $f(x) = \begin{cases} x-2, \text{при } x \le -3, \\ 3-x, \text{ при } x > -3; \end{cases}$ б) $f(x) = \begin{cases} 2x-1, \text{при } x \le -3, \\ -4+x, \text{ при } x > -3. \end{cases}$

1) Какие точки нужно проверить на разрыв?

2) Какими функциями, непрерывными или разрывными, они являются?

3. Устраните разрыв функции:

1) $y = \dfrac{x-2}{\sqrt{x}+\sqrt{2}};$ 2) $y = \dfrac{x^3+27}{x+3};$ 3) $y = \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1};$ 4) $y = \dfrac{1-\cos^2 x}{\sin x}$.

Домашнее задание. п.1, задания из домашней контрольной работы № 1 и контрольные вопросы и задания к пункту.

2. Предел функции (2 ч)

В данном пункте изучается следующий материал: непрерывность функции в точке и на промежутке; точка разрыва; разрыв функции: бесконечный и устранимый.

Предметные результаты обучения: вычислять предел функции в точке; изображать схематически график, имеющий заданный предел в точке; проводить обоснования о пределах и непрерывности функции на иллюстративном уровне; решать неравенства методом интервалов.

Метапредметные результаты обучения: устанавливать истинность утверждений о непрерывности функций.

Цель первого урока: изучение понятия предела функции в точке и его обозначения, формирование умения школьников вычислять значения этих пределов.

Комментарии. Начинается урок с контроля знаний по материалу предыдущей темы.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Устраните разрыв функции $y = \dfrac{2x^3 - 0{,}3x^2}{0{,}1x^2}$.

2. Решите неравенство $\dfrac{2x^2 - 5x + 3}{x + 0{,}5} \le 0$.

Вариант 2

1. Устраните разрыв функции $y = \dfrac{0{,}2x - 0{,}1x^2}{2 - x}$.

2. Решите неравенство $\dfrac{x+1}{3x^2 + 5x - 8} \ge 0$.

Ответы к самостоятельной работе

Вариант 1. 1. $y = 20x - 3$. **2.** $x < -0{,}5$; $0{,}5 \le x \le 1{,}5$.

Вариант 2. 1. $y = 0{,}1x$. **2.** $-\dfrac{8}{3} < x \le -1$; $x > 1$.

Понятие предела сначала формируется на интуитивно-образном уровне. Сравнивается рисунок 4 в учебнике с рисунками 9 и 10. Рисунок 4 использовался при введении понятия непрерывности функции в точке. Этот рисунок повторяется под номером 9. Рисунок 10 отличается лишь тем, что точка M_0 на нем «выколота», поэтому нельзя говорить о значении функции в точке $f(x_0)$. И на рисунке 9, и на рисунке 10 точка M «стремится» к точке M_0.

Понятие предела формулируется на описательном уровне. Оперируя терминами «аргумент» и «функция», ученики получают, утверждение типа: «*При неограниченном приближении значения аргумента к абсциссе точки M_0 значение функции становится как угодно близким к ординате точки M_0*». Важно подчеркнуть, что речь здесь идет не о каких-то отдельных значениях функции, а обо всех ее значениях из некоторой окрестности ординаты точки M_0. В таких случаях в математике используется термин «предел» и обозначение $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ (читается: предел эф от икс при икс стремящемся к икс нуль равен игрек нуль).

Сравнение рисунков 9 и 10 позволяет сделать вывод о том, что различие в понятиях «предел в точке» и «непрерывность в точке» заключается лишь в том, что для предела не играет никакой роли значение функции в самой точке x_0, так как все происходит при приближении к ней. Важным является случай, когда функция в точке x_0 непрерывна (рис. 9 в учебнике). При этом значение функции в точке x_0 равно пределу в этой точке – это позволяет сформулировать определение непрерывности через предел.

При изучении предыдущего пункта говорилось о том, что любая элементарная функция непрерывна в любой точке своей области определения. Значит, если можно найти значение элементарной функции в точке, то оно будет равно пределу функции в этой точке. Иллюстрацией вычисления такого предела и образцом оформления является пример 1 из объяснительного текста, который разбирается по учебнику.

После этого по учебнику школьники фронтально выполняют № 13, 14, 15.

Затем рассматривается пример 2, в котором сначала приходится устранить разрыв функции (устранение разрывов рассматривалось в предыдущем пункте), а затем уже найти предел непрерывной функции. Урок завершается выполнением № 16 (1, 2).

Домашнее задание. п. 2, № 15 (3, 4), 16 (3, 4), 17 (1, 2).

Цель второго урока: закрепление графических представлений о вариантах вида графика функции в окрестностях точек, и связи этих вариантов с наличием или отсутствием пределов.

Комментарии. Начать урок можно с устной работы.

Устная работа

Вычислите предел:

1) $\lim\limits_{x\to 0} 3x-2$; 4) $\lim\limits_{x\to -1}\left(5x^2-x\right)$; 7) $\lim\limits_{x\to 6}\sqrt{x^2-11}$; 10) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{-x-1}{x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to -1}(2x-3)$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\cos x$; 8) $\lim\limits_{x\to 0,25}(\log_2 x)$; 11) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x+3)x}$;

3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$; 6) $\lim\limits_{x\to -2} 3^x$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-5x}{x}$; 12) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$.

Ответы к заданиям устной работы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
–2	–5	–4	6	1	$\frac{1}{9}$	5	–2	–5	–1	$\frac{5}{3}$	$2\sqrt{3}$

Затем фронтально (желательно проецировать на экран соответствующие графики) обсуждается № 18.

После обсуждения школьникам предлагается самостоятельно в тетрадях изобразить графики № 19. В процессе обсуждения учеников можно приглашать к доске для изображения своих графиков.

Затем фронтально обсуждаются вопросы № 20. В процессе обсуждения ученики могут иллюстрировать ответы графиками рисунков 12 и 13. Работе с рисунком 13 посвящен № 21. Учитель может дополнить материал учебника, упомянув о возможности находить односторонние пределы в заданиях № 21(б-д), обратив внимание, что у непрерывной функции в № 21 (а) левый и правый пределы равны. При этом обозначение односторонних пределов показывать учащимся не следует.

Затем внимание класса привлекают к рисунку 16, на котором ученики должны указать функции, не имеющие предела в точке 2.

Домашнее задание. п. 2, №15 (5, 6), 16 (5, 6), 17(3, 4).

3. Свойства пределов и асимптоты графиков функций (3 ч)

В данном пункте изучается следующий материал: уравнения вертикальной, горизонтальной и наклонной асимптот; понятия бесконечного предела и предела на бесконечности; понятие делимости многочлена и правила вычисления пределов функции.

Предметные результаты обучения: записывать уравнения вертикальных и горизонтальных асимптот; формулировать определения непрерывности и предела функции в точке; формулировать и применять правила вычисления пределов; строить графики функций.

Метапредметные результаты обучения: применять пакеты компьютерных программ для построения графиков функций; составлять план выполнения задания; обосновывать математические утверждения; считывать информацию с графика функции; переводить записи с естественного языка на математический и обратно.

Цель первого урока: изучение формул суммы, произведения и частного пределов функций; вычисление пределов функций при *x*, стремящихся к бесконечности; нахождение асимптот графиков функций.

Комментарии. В начале урока можно предложить самостоятельную работу на 2 варианта по материалу домашнего задания.

Самостоятельная работа

Вариант 1

Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x \to 0}(5x-7)$;

2) $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{3x^2-7x}{x}$;

3) $\lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x$;

4) $\lim\limits_{x \to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$;

Вариант 2

Вычислите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to -1}(-x-3)$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-2x^3}{x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}x$;

4) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+x-6}{2x+6}$;

Ответы к самостоятельной работе

Вариант 1.1. –7. **2.** –7. **3.** $-\sqrt{3}$. **4.** 5.

Вариант 2. 1. –2. **2.** 1. **3.** –1. **4.** –2,5.

После самопроверки самостоятельной работы по предоставленным учителем ответам и обсуждения результатов рассматривается функция $y = \sin\frac{1}{x}$ и ее график (рис. 14 в учебнике). Следует добиться понимания школьниками того факта, что ни одно число не может быть взято за предел этой функции при x, стремящемся к нулю, так как в любой, как угодно малой окрестности нуля, найдутся точки графика, ординаты которых отличаются от этого числа, по крайней мере, на 1. Здесь же делается вывод о невозможности существования двух пределов в одной и той же точке.

Затем ученики переходят к изучению свойства пределов, в результате чего даются их рабочие формулировки. Поскольку от учащихся не требуются доказательства свойств, и им предстоит встречаться с элементарными функциями, можно проиллюстрировать свойства пределов, рассмотрев, например, функции $f(x)=x^2$ и $g(x)=2x$.

$$\lim_{x\to 2}(x^2+2x)=2^2+2\cdot 2=8,\ \lim_{x\to 2}x^2=2^2=4,\ \lim_{x\to 2}2x=2\cdot 2=4,$$

$$\lim_{x\to 2}(x^2+2x)=\lim_{x\to 2}x^2+\lim_{x\to 2}2x.$$

При устном выполнении № 22 сначала определяется, чем (суммой, произведением или частным данных функций) является выражение, стоящее под знаком предела, затем проговаривается формулировка соответствующей теоремы, и, наконец, вычисляется предел. Единственное затруднение может вызвать последнее задание номера, в котором под знаком предела стоит степень. Возможно, учителю потребуется напомнить школьникам, что степень с натуральным показателем – это другая запись произведения одинаковых множителей. После вычисления данного предела с помощью теоремы о пределе произведения ученикам можно предложить сформулировать теорему о пределе степени и записать ее в символической и словесной формулировке. Хотя обоснование этой теоремы очевидно только для степени с целым показателем, можно декларировать ее истинность (с учетом ограничений на ее основание) и для любых показателей.

Затем внимание школьников снова привлекается к рисунку 14, на котором изображен график функции $y=\sin\frac{1}{x}$. Однако теперь нас интересует поведение функции при удалении точек ее графика от оси ординат. На рисунке видно, что точки приближаются к оси абсцисс. Это объясняется стремлением аргумента синуса к нулю при *неограниченном увеличении x*. Неограниченное увеличение x означает, что значения x становятся как угодно большими, т.е. больше любого наперед заданного числа. Символически это записывается следующим образом: $x \to +\infty$. Ученикам предлагается догадаться, что означает запись: $x \to -\infty$. Несколько больше фантазии потребуется от учеников для расшифровки записи: $x \to \infty$. Правильный ответ, что это то же самое, что и $|x| \to +\infty$.

После обсуждения этих вопросов записывается, что $\lim\limits_{x\to\infty} \sin\frac{1}{x} = 0$.

Полезно предложить школьникам догадаться о смысле обозначений $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = a$.

[Точки графика функции при неограниченном удалении от оси ординат (в случае $+\infty$ вправо, а в случае $-\infty$ влево, неограниченно приближаются к прямой $y = a$].

Такая ситуация встречалась при рассмотрении функции $y = \frac{1}{x}$. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = a$, где $a = 0$. Ось ординат ($y = 0$), слиться с которой стремятся точки гиперболы, называют *горизонтальной асимптотой*. Ось ординат является также горизонтальной асимптотой показательной функции: $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^x = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} 0{,}5^x = 0$. Аналогично, горизонтальную асимптоту $y = 2$ имеет дробно-линейная функция $y = 2 + \frac{1}{x}$.

Затем по учебнику рассматриваются примеры 1, 2 и выполняются задания № 25 (б, г).

Домашнее задание. п. 3, № 25 (а, в), 31 (1, 2).

Цель второго урока: знакомство с бесконечными пределами и формирование умения находить вертикальные асимптоты графиков функций и формирование понятия наклонных асимптот.

Комментарии. После обсуждения домашнего задания школьники по учебнику знакомятся со смыслом обозначения $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ и самостоятельно объясняют, что скрывается за обозначениями: 1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$; 2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$; 6) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ и т.п.

Желательно, чтобы учащиеся привели свои примеры функций, иллюстрирующие каждую запись для этого достаточно изображения схематического графика.

Ученики должны понимать, что речь идет об использовании обозначения и термина «предел» в ситуации, когда *функция предела не имеет*. Т.е. говорят, что предел функции при x, стремящемся, например, к 2, равен бесконечности, зная, что при x, стремящемся к 2, у этой функции предела нет, но что при приближении абсциссы точки ее графика к 2 значения функции по модулю будут становиться (и оставаться) как угодно большими. Примером такой функции является $y = \dfrac{1}{x-2}$. Изобразив на доске схематический график этой функции, учитель напоминает о том, что прямая $x = 2$ называется его *вертикальной асимптотой*.

Часто вертикальные асимптоты будут встречаться при работе с дробями, знаменатель которых стремится к нулю, как, например в № 23 (а, г), который выполняется устно. Так, в № 23 (а), чтобы дробь стала по модулю больше, например, 100, ее знаменатель по модулю должен быть меньше 100^{-1}. Для любого числа b рассуждения аналогичны: следует выбирать значения x из окрестность точки 3, границы которой отстоят от 3 менее, чем на b^{-1},т.е. $|3-x| < \dfrac{1}{b}$. Формальных доказательств не требуется. Аналогично выполняются задания № 24 (1, 3).

Домашнее задание. п. 3, № 23 (б, в), 24 (2, 4).

Цель третьего урока: закрепление умения школьников находить вертикальные, горизонтальные асимптоты и формирование понятия наклонной асимптоты.

Комментарии. После проверки домашнего задания рассматривается по учебнику пример 3, в котором вводится понятие наклонной асимптоты.

Исходное выражение оказалось тождественно равно сумме линейного двучлена $x - 1$ и дроби $\dfrac{1}{x+1}$, предел которой при $x \to \infty$ равен нулю. Это значит, что при больших по модулю значениях x исходное выражение принимает практически те же значения, что и линейный двучлен $x - 1$. Графически это значит, что точки графика при удалении от оси ординат неограниченно приближаются к прямой $y = x - 1$. Полезно провести эту прямую в системе координат на доске и спросить учащихся, сверху или снизу приближаются к ней точки графика. С таким стремлением точек к прямой школьники встречались, когда речь шла о горизонтальной асимптоте. По аналогии прямую $y = x - 1$ называют *наклонной асимптотой* графика функции $y = \dfrac{x^2}{x+1}$. Проведя еще и его вертикальную асимптоту, получаем рисунок 15 учебника.

Полезно рассмотреть и рисунок 16, на котором у графика функции имеется две наклонные асимптоты.

Затем школьники самостоятельно выполняют № 26 (1), результаты которого обсуждаются фронтально. После этого выполняется № 28 (в), в котором, кроме сформулированных в учебнике заданий, школьникам можно дополнительно предложить схематически изобразить график данной функции.

В заключение урока фронтально рассматриваются вопросы в № 29. В случае утвердительного ответа ученик выходит к доске и схематически изображает соответствующий график.

Домашнее задание. п. 3, № 26 (2), 28 (а, б, г), 46, контрольные вопросы и задания к пункту.

Зачет по теме «Непрерывность и пределы функций»

Инструкция к проведению зачета

Зачет проводится по двум вариантам заданий, которые могут быть записаны на доске или на карточках. Ученики, первыми выполнившие все задания, подходят с работой к учителю. Учитель проверяет работу и задает по ходу проверки теоретические вопросы. Ученики, которые правильно решили все задания и ответили на вопросы учителя, считаются сдавшими зачет и становятся консультантами. Остальные ученики могут сдать зачет учителю или консультанту. Каждому консультанту выдается таблица и список устных вопросов Сначала консультант проверяет выполнение учащимся письменной части зачета и ставит в таблице под номером задания соответственно «+» или «–». Если плюсов больше, чем минусов, то из списка вопросов консультант задает учащемуся вопрос, заносит в таблицу его номер и оценивает ответ на него знаком «+», если ответ правильный, и знаком «–», в противном случае.

Учитель просматривает таблицы у консультантов, видит общую картину сдачи зачета, оказывает индивидуальную помощь ученикам.

№	Фамилия И.	1	2	3			4	5
				а)	б)	в)		
1.								
2.								

Задания для письменной части зачета

Вариант 1

1. Устраните разрыв функции $y = \dfrac{3x^3 - 5x^2 - 7x}{x}$.

2. Решите неравенство методом интервалов $\dfrac{(x+2)(2x-3)}{5+4x} \le 0$.

3. Вычислите пределы функции:

а) $\lim\limits_{x\to -2}(6x+9)$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+5x-7}{x^2-1}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{x}$.

4. Напишите уравнения асимптот и постройте схематический график функции $y = \dfrac{2x^2+x}{(x+1)^2}$.

Вариант 2

1. Устраните разрыв функции $y = \dfrac{x^4 - 3x^3 + 7x^2}{x^2}$.

2. Решите неравенство методом интервалов $\dfrac{(x-3)(2x+5)}{3-4x} \geq 0$.

3. Вычислите пределы функции:

а) $\lim\limits_{x\to -3}(2x-12)$; б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x^2 - x - 10}{x^2 - 4}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{7}{x^2}$.

4. Напишите уравнения асимптот и постройте схематический график функции $y = \dfrac{3x^2 - x - 1}{(x-1)^2}$.

Ответы к зачету

Вариант 1. 1. $y = 3x^2 - 5x - 7$. **2.** $x \leq -2$ и $-1{,}25 < x \leq 1{,}5$. **3.** а) –3; б) 4,5; в) 0. **4.** $x = -1$; $y = 2$.

Вариант 2. 1. $y = x^2 - 3x + 7$. **2.** $x \leq -2{,}5$ и $0{,}75 < x \leq 3$. **3.** а) –18; б) $\dfrac{11}{4}$; в) 0. **4.** $x = 1$; $y = 3$.

Вопросы для устной части зачета

1. Приведите пример кусочно-заданной функции, имеющий разрыв в точке с абсциссой, равной –1.

2. Приведите пример непрерывной функции.

3. Изобразите график функции, имеющий бесконечный разрыв в точке $x_0 = 1$.

4. Изобразите график функции, имеющий устранимый разрыв в точке $x_0 = 1$.

5. Дайте определение функции, возрастающей (убывающей) на промежутке.

6. Дайте определение непрерывности функции в точке x_0.

7. Дайте определение непрерывности функции на промежутке.

8. Какое свойство непрерывной на промежутке функции используется в решении неравенств методом интервалов?

9. Найдите точки разрыва функции: $y = \dfrac{1}{x+3}$; $y = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2}$.

10. Как читается и что обозначает запись $\lim\limits_{x\to b} f(x)$?

11. Чем различаются понятия непрерывности и предела функции в точке?

12. Как ведет себя функция $f(x)$, если известно, что:

1) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 5$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 5$; 4) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$; 5) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$?

13. Как найти вертикальную асимптоту графика функции $f(x)$?

14. Как найти горизонтальную асимптоту графика функции $f(x)$?

15. Может ли график функции иметь и горизонтальную, и наклонную асимптоты?

16. Может ли график функции иметь три горизонтальных асимптоты?

Контрольная работа № 1
Тема «Непрерывность и пределы функций»

Вариант 1

I *уровень*

В заданиях 1–4 укажите номер ответа, который вы считаете верным.

1. Укажите разрывную функцию:

А. $y = 2x^3 - 5x^2 + 7$; **Б.** $y = \arccos x$; **В.** $y = \frac{1}{x}$; **Г.** $y = \sqrt{x}$.

2. Вычислите $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3 - 1}{3^x}$.

А. 0; **Б.** –6; **В.** $-\frac{2}{3}$; **Г.** другой ответ.

3. Укажите функцию, которая имеет вертикальную асимптоту.

А. $y = \frac{2}{x-1}$; **Б.** $y = x + 2$; **В.** $y = \frac{5}{x^2+1}$; **Г.** $y = \sin x$.

4. Вычислите предел функции $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{6 - 3x^2}{5x^2 - 1}$.

А. 1,2; **Б.** 0,6; **В.** –0,6; **Г.** другой ответ.

II *уровень*

5. Решите методом интервалов неравенство $\frac{5x^2 + 9x - 2}{\sqrt{x+3}} \ge 0$.

6. Устраните разрыв функции $y = \frac{x^3 + 2x - 3x^2 - 6}{x - 3}$.

III *уровень*

7. Найдите уравнение наклонной асимптоты к графику функции $y = \frac{5x^2 + 9x - 3}{x}$.

Вариант 2

I *уровень*

В заданиях 1–4 укажите номер ответа, который вы считаете верным.

1. Укажите непрерывную функцию:

А. $y = \frac{1}{x}$; **Б.** $y = \mathrm{ctg} x$; **В.** $y = \frac{5}{x-2}$; **Г.** $y = \sin x$.

2. Вычислите $\lim\limits_{x \to -1} \left(\frac{x^4 - 2}{\sqrt[3]{x^2 + 7}} \right)$.

А. 0; **Б.** –1; **В.** –0,5; **Г.** другой ответ.

3. Укажите функцию, которая имеет вертикальную асимптоту.

А. $y = \frac{2x^2 + 1}{5x^2}$; **Б.** $y = x^3 - 2$; **В.** $y = \cos x$; **Г.** $y = \sqrt{x}$

4. Вычислите предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-7}{2x^2-5}$.

А. 2,5; **Б.** 0,6; **В.** 1,2; **Г.** другой ответ.

II *уровень*

5. Решите методом интервалов неравенство $\frac{3x^2-4x-4}{\sqrt{2x+1}}\le 0$.

6. Устраните разрыв функции $y=\frac{5x^2+5-x^3-x}{5-x}$.

III *уровень*

7. Найдите уравнение наклонной асимптоты к графику функции $y=\frac{2x^2-3x+5}{x}$.

Ответы к контрольной работе

Вариант 1. 1. 3. **2.** 2. **3.** 1.**4.** 3. **5.** $-3<x\le -2$, $x\ge 0{,}2$. **6.** x^2+2. **7.** $y=5x+9$.

Вариант 2. 1. 4. **2.** 3. **3.** 1. **4.** 1. **5.** $-\frac{1}{2}<x\le 2$. **6.** x^2+1. **7.** $y=2x-3$.

ГЛАВА 2
ПРОВИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

При изучении производной применяется один из основных дидактических принципов, положенных в основу нашего курса – *принцип разделения трудностей*. Сначала внимание школьников акцентируется на формировании понятия производной, зависимости производной от характера изменения функции и на возможностях использования этой зависимости при исследовании функций и построении их графиков. А технические вопросы, связанные с применением правил и формул дифференцирования, отнесены в третью главу.

4. Касательная к графику функции (3 ч)

В данном пункте изучаются следующие понятия: секущая и касательная к графику функции в точке; угловой коэффициент касательной; уравнение касательной к графику функции.

Предметные результаты обучения: формулировать определение касательной к графику функции в точке; строить касательную к графику функции и записывать ее уравнение; строить график функции и касательные к нему в тетради.

Метапредметные результаты обучения: применять пакеты компьютерных программ для построения графиков функций; считывать информацию с графика функции и использовать ее в познавательной практике.

Цель первого урока: формирование понятия касательной к графику функции в точке.

Комментарии. В учебнике несколько изменена последовательность изучения материала по сравнению с традиционной. В основу положен тот факт, что гладкая кривая в достаточно малой окрестности любой своей точки *спрямляется*, т.е. выглядит как отрезок прямой. Это позволяет заменять график функции в окрестности практически любой его точки на график самой простой из функций – линейной. Именно на возможности такого упрощения и основан математический анализ.

С термином «касательная» ученики чаще всего встречались в курсе геометрии применительно к окружности. В учебниках геометрии определение касательной к окружности, как правило, дается геометрически – она определяется либо как прямая, имеющая с окружностью единственную общую точку, либо как перпендикуляр к радиусу окружности, проходящий через его конец. Рассматривая на странице 28 учебника рисунки 19 и 20, школьники приходят к выводу, что уже для полуокружности определение касательной, как прямой, имеющей с ней единственную общую точку не проходит. Заметим, что все еще можно использовать определение касательной через перпендикулярность, но для определения касательной к графику произвольной функции придется отказаться и от него.

Убедившись в невозможности распространения старого определения касательной к окружности на другие кривые, школьники рассматривают сначала рисунок 21, а затем 22. На рисунке 21 (а) точка M_0 взята в прямоугольник. Этот прямоугольник вместе с тем, что оказалось внутри него, увеличен на рисунке 21 (б). Следующее увеличение приводит к рисунку 21 (в). Эти рисунки позволяют дать другое определение касательной, которое подойдет и к окружности, и к другим кривым. Определение касательной приведено в учебнике на с.29.

После знакомства с определением выполняется № 33. Сначала находятся угловые коэффициенты касательных, а затем записываются уравнения. Угловые коэффициенты касательных на рисунке 28 проще определять, выделяя на касательных узлы координатной сетки, и находить тангенс угла наклона касательной, как частное катетов соответствующих прямоугольных треугольников. Так, например, на рисунке 28 (а) можно взять на касательной точки (–4; –3) и (0; –1). Третья вершина прямоугольного треугольника (0; –3). Противолежащий катет равен 2, а прилежащий 4, значит, $k = \frac{2}{4} = 0{,}5$. На рисунке 28 (г) можно взять точки (–1; 0) и (3; –1), тогда прилежащий катет равен 4, а противолежащий 1. С учетом знака получим $k = -\frac{1}{4}$. Уравнения касательных можно писать как уравнения прямых с данным угловым коэффициентом и начальной ординатой. В случае 28 (а) имеем: $y = 0{,}5x - 1$. Уравнение касательной к рисунку 28 (г) на этом уроке не находят.

Затем выполняется № 34. Работая с графиком на рисунках 29, школьники отвечают на вопросы номера. Следует подчеркнуть, что задание выполняется приближенно. Так, например, прикладывая линейку в точке с абсциссой x_1, ученики замечают, что сдвиг точки по полученной прямой на одну клетку вправо поднимает эту точку примерно на две клетки вверх, а значит, угловой коэффициент этой прямой приближенно равен 2. Установив линейку в соответствующее положение (параллельно оси абсцисс, или биссектрисе первого координатного угла), ученик сдвигает ее параллельно самой себе, пока она не коснется графика, после чего указывает абсциссу найденной точки касания.

По рисункам 23, 24 в учебнике школьники знакомятся с двумя основными ситуациями отсутствия касательной и устно выполняют № 35.

Домашнее задание. п. 4, № 36 (1, 2), 37.

Цель второго урока: формирование умения находить угловой коэффициент касательной как предел и записывать уравнение касательной к графику функции в заданной точке.

Комментарии. Изучение материала начинается с обсуждения рисунка 25 на с.30. В результате обсуждения ученики с большей или меньшей (в зависимости от уровня подготовки класса) опорой на учебник приходят к формуле $k = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{y - y_0}{x - x_0}$.

Школьники по учебнику разбирают пример 1, кроме его пункта 4, в котором записывается уравнение касательной. Затем, используя это решение как образец, самостоятельно выполняют № 36 (3). Полезно обратить внимание на то, что график функции $y = x^2 + 1$ из домашнего задания № 37 (1) получается из графика функции $y = x^2$ из № 36 с помощью сдвига последнего вверх на 1. Значит, касательные к этим графикам в их точках с абсциссой –1 параллельны.

После выполнения этих заданий завершается рассмотрение примера 1. Следует напомнить школьникам, что уравнение любой прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $A(x_0;\ y_0)$ имеет вид $y = k(x - x_0) + y_0$. Поэтому, чтобы его написать, нужно найти k и y_0. Что и предлагается школьникам сделать в № 38 (1). Задание № 38(1, а), с которого начинается номер, выполняется фронтально. В этом задании касательная проводится через вершину параболы, а значит, из графических соображений она параллельна оси абсцисс. Если бы она не была параллельна оси абсцисс, то в силу симметрии параболы имелась бы еще одна касательная в ее вершине. Но касательная может быть только одна, значит, она параллельна оси абсцисс, и ее уравнение $y = 0$.

В завершение урока с учениками рассматривается замечание к примеру 1, и школьникам предлагается выполнить № 39 (1) двумя способами: по алгоритму и приравнивая к нулю дискриминант соответствующего квадратного уравнения.

Домашнее задание. п. 4, № 39 (2) выполнить двумя способами.

Цель третьего урока: закрепление умения учащихся составлять уравнения касательных к графику функции в более сложных заданиях.

Комментарии. Начинается урок с обсуждения плана выполнения задания № 41. Поскольку угловые коэффициенты параллельных прямых одинаковы, то нужно найти уравнения касательных с угловыми коэффициентами соответственно 0, 1 и –2. Понятно, что первая из них проходит через вершину параболы, которая имеет абсциссу, равную $-\frac{-1}{2\cdot 2}=\frac{1}{4}$. Находим ординату вершины: $2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{4}+3=\frac{23}{8}$, получим уравнение касательной $y=\frac{23}{8}$.

В № 41 (2, 3) можно попробовать выразить угловой коэффициент касательной к данной параболе для произвольного значения x_0, а затем приравнять полученное выражение к числу 1.

№ 41 (2). Р е ш е н и е.

$$k=\lim_{x\to x_0}\frac{y-y_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{2x^2-x+3-2x_0^2+x_0-3}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{2(x^2-x_0^2)-(x-x_0)}{x-x_0}=$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{2(x-x_0)(x+x_0)-(x-x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{(x-x_0)(2x+2x_0-1)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}(2x+2x_0-1)=$$

$= 4x_0 - 1$.

$4x_0 - 1 = 1$, $4x_0 = 2$, $x_0 = 0{,}5$, $y_0 = 0{,}5 - 0{,}5 + 3 = 3$.

Уравнение касательной с $k = 1$, $x_0 = 0{,}5$, $y_0 =3$ будет следующим $y=(x-0{,}5)+3$, $y=x+2{,}5$.

№ 41 (3). Р е ш е н и е. $4x_0 - 1 = -2$, $4x_0 = -1$, $x_0 = -0{,}25$, $y_0 = 4\cdot 0{,}0625 + 0{,}25 + 3 = 3{,}5$.

Уравнение касательной с $k = -2$, , $x_0 = -0{,}25$, $y_0 = 3{,}5$:

$y=-2(x+0{,}25)+3{,}5$, $y=-2x+3$.

Решение № 41 (2) выполняется учителем на доске при активном участии школьников с мест, а ученикам предоставляется время для перенесения его в тетрадь и самостоятельного выполнения в тетради задания № 41 (3). Затем обсуждается план решения № 40, в котором полезно добавить, что искомый угол является углом между соответствующими кривыми. Обсуждается план решения, и устно вычисляются координаты точки пересечения графиков. Затем школьники самостоятельно находят угловой коэффициент касательной к первому (как в № 38 (2)), и ко второму (как в № 41 (2, 3)) графикам. Школьникам предлагается вычислить угол между касательными дома, используя при этом формулу тангенса разности, которую можно найти в справочных материалах в конце учебника.

Домашнее задание. п.4, контрольные вопросы и задания к пункту.

5. Производная и дифференциал функции (4 ч)

В этом пункте получает свое классическое определение производная. Школьники знакомятся с дифференциалом функции как главной линейной составляющей ее приращения, учатся находить производные по определению и использовать их в приближенных вычислениях. Завершает материал пункта разговор о физическом смысле производной.

Предметные результаты обучения: формулировать определение производной; доказывать, что одна функция является производной другой; объяснять физический и геометрический смысл производной; вычислять приближенные значения функции; находить производные линейной и квадратичной функций по определению; находить скорость и ускорение движения тела по закону его движения; записывать уравнение касательной по известной производной функции.

Метапредметные результаты обучения: находить скорость физических процессов по заданным законам их изменения; считывать информацию с графиков функций и использовать ее в познавательной и социальной практике.

Цель первого урока: изучение понятий «приращение аргумента» и «приращение функции», применение их для записи углового коэффициента касательной к графику функции в заданной точке.

Комментарии. Изучение материала целесообразно вести по учебнику до дополнительного материала перед примером 1 на с.37. Полезно предложить школьникам предварительно сравнить рисунок 31 с рисунком 25. На первом уроке можно пропустить всё, относящееся к понятию дифференциала.

Поскольку производная оказывается просто другим названием углового коэффициента касательной, школьники не должны испытать затруднений при фронтальном выполнении № 42–50. Желательно обсуждение ответов школьников сопровождать рассмотрением соответствующих рисунков на интерактивной доске. Необязательно рассматривать все задания из номеров – главное понимание школьниками хода решения. Нерешенные задания можно предложить на дом.

Затем новые обозначения используются школьниками при выполнении № 52 (1, а). Урок можно завершить фронтальной работой по нахождению производной конкретной функции. Учитель на доске фиксирует по предложениям учеников с мест оба шага нахождения производной по определению.

З а д а н и е. Найдите производную функции $g(x) = x^2 – 4x + 6$.

(1) $\Delta g = g(x + \Delta x) – g(x) = (x + \Delta x)^2 – 4(x + \Delta x) + 6 – x^2 + 4x – 6 =$
$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 – 4\Delta x = \Delta x(2x – 4 + \Delta x)$.

(2) $g'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta g}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x(2x-4+\Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x-4+\Delta x) = 2x-4$.

Домашнее задание. п. 5, самостоятельно разобрать пример 1 из объяснительного текста учебника и выполнить № 54.

Цель второго урока: формирование умения школьников находить производную функции по определению и использовать ее для составления уравнения касательной к графику функции в указанной точке.

Комментарии. Урок начинается с обсуждения разобранного школьниками дома примера 1. После этого, выполняя на доске записи по предложениям школьников, учитель находит производную в № 53 (3).

Затем на доске выписываются в таблицу все уже найденные производные, включая выражения для углового коэффициента касательной, которые школьники получили в предыдущем пункте. Следует также внести в эту таблицу производные функций, указанных в № 53, но не найденных учащимися.

Функция	***Производная***
$y=x^2-11x+1$	$y'=2x-11$
$y=x^2-2x+1$	$y'=2x-2$
$y=2x^2-x-3$	$y'=4x-1$
$y=x^2-4x+3$	$y'=2x-4$
$y=x^3-3x+3$	$y'=3x^2-3$
$y=x^3-12x+12$	$y'=3x^2-12$
$y=x^2$	$y'=2x$
$y=x^3$	$y'=3x^2$

Функция	***Производная***
$y=\frac{1}{x}$	$y'=-\frac{1}{x^2}$
$y=\sqrt{x}$	$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y=\frac{x}{x-1}$	$y'=-\frac{1}{(x-1)^2}$
$y=\frac{1}{\sqrt{x}}$	$y'=-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$

Заполненные на доске таблицы производных школьники переносят в свои тетради.

Ученики самостоятельно рассматривают и затем фронтально обсуждают пример 2 из учебника, после чего с помощью таблицы производных выполняют часть заданий из № 55–58.

В № 57 нужно составить уравнение касательной к графику функции так, чтобы она проходила через данную точку. Во всех заданиях это точка графика функции. В № 57 (1, 3, 4) касательная касается графика, а, в № 57 (2) касательная пересекает график, ее угловой коэффициент равен 0, а уравнение записывается так: $y = 1$.

Можно дополнительно рассмотреть случай, когда касательная проходит через точку, не принадлежащую графику функции $y=\frac{1}{x}$, например, (1; 0).

З а д а н и е. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=\frac{1}{x}$ и проходящей через точку (1; 0).

Р е ш е н и е. Общий вид уравнения касательной $y - y_0 = y_0'\,(x - x_0)$. Для данной функции $y-\frac{1}{x_0}=-\frac{1}{{x_0}^2}(x-x_0)$. Подставляем координаты точки, принадлежащей касательной $0-\frac{1}{x_0}=-\frac{1}{{x_0}^2}(1-x_0)$, $x_0=1-x_0$, $x_0=0{,}5$. Найдем ординату точки касания и угловой коэффициент касательной $y_0 = 2$, $k = -4$.

Запишем уравнение касательной $y=-4(x-0{,}5)+2$, $y=-4x+4$. При наличии соответствующего оборудования полезно показать график и найденную касательную.

Домашнее задание. п.5, № 55 (2), 57 (3, 4).

Цель третьего урока: формирование понятий дифференциала и дифференцируемой функции; умений школьников находить приближенные значения функции в точке.

Комментарии. В начале урока с помощью рисунка 31 на с.35, который использовался при введении понятия приращений функции и аргумента, по учебнику вводится понятие дифференциала. Полезно дополнить материал учебника, заметив, что дифференциал еще называют главной частью приращения функции. Кстати, на рисунке 31 непосредственно не видно, что дифференциал – главная часть приращения. Чтобы сделать идею главной части понятнее школьникам, им можно предложить приложить линейку к прямой KM и постепенно сдвигать ее к точке M_0, сохраняя параллельность оси ординат. При этом ученики наверняка заметят, что верхняя часть приращения уменьшается «быстрее», чем дифференциал.

После этого по учебнику разбирается пример 3. Следует подчеркнуть, снова возвращаясь к рисунку 31, что приближение тем точнее, чем меньше Δx. Поэтому при нахождении приближенного значения функции соблюдают два требования: Δx мало по модулю, а значение x_0 удобно для вычислений. После примера 3 эти соображения применяются в № 59 (2, 3), который выполняется учениками в тетрадях после фронтального обсуждения, какими брать x_0 и Δx во всех четырех заданиях номера.

Затем рассматривается использование дифференциалов для обозначения производной, и вводятся термины «дифференцировать», «дифференцирование», «дифференцируемая функция».

В сильных классах урок можно завершить обсуждением и выполнением № 49, 51.

В № 49 изображены графики дифференцируемой функции (рис. 42, б) и недифференцируемой функции (рис. 42, а). График (рис. 42, а) состоит из четырех отрезков, на первом из которых производная равна –1, на втором 0, на третьем 2 и на четвертом 0. Внутри указанных отрезков производные функции (рис.43, а) такие же, как производные функции, график, которой изображен на рисунке 43 (б). Но график производной (рис.43, б) не разрывается на концах упомянутых отрезков. Точки ее графика при приближении к концам плавно соединяют прямолинейные участки.

В № 51 используется известный школьникам факт симметричности графика в задании № 51 (1) четной функции относительно оси ординат и № 51 (2) нечетной функции относительно начала координат. Понятно, что касательные в симметричных точках графика симметричны друг другу. У касательных, симметричных относительно оси ординат, угловые коэффициенты противоположны, а у касательных, симметричных относительно начала координат – равны. Поскольку угловые коэффициенты касательных – это производные соответствующей функции, а симметричные точки графиков имеют противоположные абсциссы, получаем доказываемые утверждения: 1) $f'(-x) = -f'(x)$; 2) $f'(-x) = f'(x)$.

Домашнее задание. п. 5, контрольные вопросы и задания к пункту, № 58 (1), 59 (1, 4).

Цель четвертого урока: изучение физического смысла производной функции в точке.

Комментарии. Обсуждение ведется с опорой на учебник. Важно подчеркнуть, что движение происходит по прямой, проходящей через точку начала отсчета. В противном случае скорость не будет являться производной расстояния от начала отсчета.

Выполняются задания из № 60–65. При выполнении заданий № 62, 63, 65 предполагается знакомство школьников с соответствующими физическими понятиями. Напомним, что задания, отмеченные значком «» предназначены для обсуждения со всем классом.

Домашнее задание. п. 5, № 61, 64.

РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ ПУНКТА

№ 53 (4). 1) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$; умножим числитель на сопряженное выражение, чтобы получить разность квадратов (не забыв, соответственно, умножить и знаменатель дроби):

$$\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}};$$

2) $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$

№ 55 (2, а). $2x-4\le\frac{3}{4},\ x\le 2\frac{3}{8}.$

№ 55 (2, б) $3x^2-12>15$, $x^2>9$, $x<-3$ и $x>3$.

№ 60 (1, б). $\Delta s=s(7)-s(5)=49-28+3-(25-20+3)=24-8=16$;

$\Delta t=7-5=2$; $v_{\text{ср}}=16:2=8$ (м/с).

№ 60 (2, б). $v(t)=s'(t)=2t-4$ (м/с), $v(5)=s'(5)=2\cdot 5-4=6$ (м/с).

№ 61 (2). $v(t)=2t-4,\ 2t-4=24,\ t=14(c).$

№ 63. $v(t)=2t-4,\ \frac{mv^2}{2}=\frac{0{,}5\cdot(2\cdot 7-4)^2}{2}=25\,(Дж).$

6. Точки возрастания, убывания и экстремума функции (3 ч)

В данном пункте изучается следующий материал: возрастание и убывание функции; теорема Лагранжа; условие монотонности функции; понятие максимума и минимума функции; экстремум и критические точки функции. Производная по сути дела остаётся угловым коэффициентом касательной, что позволяет на наглядном уровне познакомить школьников с условиями возрастания, убывания и экстремумов функций.

Предметные результаты обучения: находить промежутки возрастания и убывания функции с помощью производной; Формулировать определения максимума и минимума функции, экстремума и критической точки функции; находить точки максимума и минимума с помощью производной; проводить исследование функции с помощью производной и строить ее график; строить графики функций в тетради.

Метапредметные результаты обучения: заполнять таблицы по результатам исследования функций; находить ошибки в построении графиков; устанавливать истинность утверждений о критических точках функции; строить график функции с применением пакетов компьютерных программ.

Цель первого урока: формирование понятий точки возрастания и убывания функции, экстремума и критической точки, достаточное условие возрастания и убывания функции на промежутке.

Комментарии. Начинается урок с проведения устной работы.

Устная работа

На доске записывается функция $s(t) = 2t^2 - 8t + 10$ и ее производная $s'(t) = 4t - 8$.

З а д а н и я

1. Тело движется по прямой так, что расстояние *s* до него от некоторой точки этой прямой изменяется по закону $s(t) = 2t^2 - 8t + 10$ (м), где *t* (с) – время движения. Найдите:

а) скорость тела через 5 с (через 10 с) после начала движения;

б) момент, в который скорость тела была равна 16 м/с (44м/с);

в) момент, в который тело остановилось;

г) момент, в который расстояние от тела до точки отсчета было наименьшим

2. Найдите уравнение касательной к графику функции $y = 2x^2 - 8x + 10$ в точке $x_0 = 1$ (в точке $x_0 = 2$).

Ответы к устной работе

1. а) 12 м/с (32 м/с); б) 6 с (13 с); в) 2 с; г) 2 с. **2.** $y = -4x + 8$ ($y = 2$).

На предыдущих уроках школьники повторили, как зависит расположение прямой $y = kx + b$ от знака ее углового коэффициента. Рассматривая случаи $k > 0$ и $k < 0$ на рисунках 44, 45 на с.47, вводим понятие точки возрастания и точки убывания функции, а также делаем вывод о том, что по знаку производной можно определить, какой точкой (точкой возрастания или точкой убывания) является данная точка.

Закрепляется понятие точек возрастания и убывания при выполнении заданий № 66, 67, 68 (1, 2).

Отвечая на вопрос о поведении функции на промежутке, все точки которого являются точками возрастания (убывания), школьники формулируют достаточные условия возрастания и убывания функции на промежутке. Можно рассмотреть теорему Лагранжа, опираясь на ее графический смысл.

Затем обсуждается ситуация, когда касательная к графику функции параллельна оси абсцисс (рис. 47). Материал о точках максимума и минимума рассматривается так же, как и материал о точках возрастания и убывания. Следует обратить внимание школьников на то, что точка, слева от которой непрерывная функция возрастает, а справа убывает, называется «точкой максимума», а если слева убывает, а справа возрастает – «точкой минимума». Ученики иногда допускают ошибки, говоря, например, «точки максимумов». Полезно обратить их внимание на то, что говорить следует «точки максимума», «точки минимума». В завершении урока фронтально выполняются задания нахождения промежутков возрастания, убывания, точек максимума и минимума по рисункам 58, 60.

Домашнее задание. п. 6, № 70, указать точки максимума и минимума функций, графики которых изображены на рисунках 54–56.

Цель второго урока: формирование умения школьников проводить исследование функции с помощью производной.

Комментарии. Урок можно начать с обсуждения решения № 71.

№ 71. Р е ш е н и е. На промежутке [–1; 1] производная равна нулю, значит, функция на этом промежутке постоянна. Если теорема Лагранжа рассматривалась, то можно с ее помощью этот вывод обосновать, например, так: если бы на этом промежутке были точки a и b такие, что $p(a) \neq p(b)$, то в некоторой точке c интервала $(a; b)$ по теореме Лагранжа $p'(c) = \dfrac{p(b) - p(a)}{b - a} \neq 0$. Но такой точки c на рассматриваемом промежутке нет, значит, во всех его точках функция $p(x)$ принимает одно и то же значение.

На промежутках $(3; +\infty)$ и $(-\infty; -3)$ производная положительна, значит, непрерывная функция $p(x)$ возрастает на промежутках $[3; +\infty)$ и $(-\infty; -3]$.

На интервалах (1; 3) и (–3; –1) производная отрицательна, значит, непрерывная функция $p(x)$ убывает на промежутках [1; 3] и [–3; –1].

В точке 3 функция имеет минимум, а в точке –3 – максимум. Здесь можно ввести обобщающее понятие *экстремума* и соответственно *точек экстремума*.

Из наличия у функции $p(x)$ производной в каждой точке области определения можно сделать вывод о ее непрерывности. График строится схематически, однако симметрия его относительно точки на оси ординат должна быть видна. Можно несколько упростить задачу, дополнив условие тем, что график функции $p(x)$ проходит через начало координат.

Построив график функции $y = p(x)$, следует обратить внимание школьников на то, что весь отрезок [–1; 1] состоит из точек экстремума. Причем $x = -1$ является точкой минимума, $x = 1$ – точкой максимума, а любая из точек интервала (–1; 1) является одновременно и точкой максимума, и точкой минимума.

Затем по рисунку 55 делается вывод, что в точке экстремума производная либо равна нулю, либо не существует и дается определение критической точки – точки, которую нужно проверять на экстремум.

По учебнику рассматриваются примеры 1 и 2 (производная функции $f(x) = x^3 - 3x + 3$ имеется в тетрадях школьников в таблице производных).

В процессе обсуждения формулируются достаточные условия максимума и минимума функции (в учебнике эти условия сформулированы перед примером 1). Полезно подчеркнуть важность присоединения к промежуткам монотонности граничных точек – именно здесь выпускники часто допускают ошибки.

Результаты исследования функции $y = x^3 - 3x + 3$ по мере их получения заносятся в таблицу, во второй строке которой используются условные обозначения (можно подождать с обозначением перегиба до построения соответствующего графика). Рассмотрение примера 2 добавляет к этой таблице конкретные значения экстремумов и координаты дополнительных точек. Построение графика начинается с изображения его частей вблизи экстремумов и дополнительных точек.

После этого обсуждения школьники самостоятельно выполняют № 69, как бы вписывая график карандашом в изображенные касательные.

Затем школьникам предлагается составить характеристические таблицы для функций, графики которых изображены на рисунках 54–56.

Затем решается обратная задача № 73 (2), в которой уже не обойтись без пояснения обозначения перегиба.

Домашнее задание. Составить характеристические таблицы для функций, графики которых изображены на рисунке 60, разобрать пример 3, выполнить № 73 (1), 75 (2).

Цель третьего урока: формирование умения школьников проводить исследование функции и строить ее график, строить график по заполненной таблице свойств и по их описанию.

Комментарии. Начать урок следует с обсуждения результатов домашней работы. Школьники в парах рассматривают полученные ими таблицы и построенные графики. В случае расхождений во мнениях задают вопросы учителю.

После этого можно разобрать № 76 (2–6). При фронтальном выполнении заданий этого номера школьникам не понадобятся заполненные при изучении предыдущего пункта таблицы с производными некоторых функций. Так, например, на всей области определения функции в № 76 (5) знаменатель возрастает, что влечет убывание самой функции, а значит, промежуток убывания $(0;+\infty)$. В № 76 (2) следует обратить внимание на «склеивание» двух промежутков возрастания, а в задании № 76 (3) на недопустимость объединения промежутков убывания.

В № 76 (6) придется либо воспользоваться таблицей некоторых производных, либо преобразовать выражение, задающее функцию. Полезно рассмотреть оба варианта.

1) $y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$. Область определения функции состоит из двух интервалов: $(-\infty;1)$ и $(1;+\infty)$. На каждом из них функция убывает, так как ее производная отрицательна.

2) $\frac{x}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$. Значит, график данной функции гипербола $y = \frac{1}{x}$, поднятая на 1 вверх и сдвинутая на 1 вправо. На 1 вправо при этом сдвигаются и границы промежутков убывания, найденные в задании № 76 (3).

После проверки домашнего задания разбирается пример 3, в котором особое внимание уделяется заполняемой таблице.

Школьникам предлагается сначала № 77 (2), а затем с опорой на результаты его выполнения № 78.

Завершить урок можно самостоятельной работой.

Самостоятельная работа

По информации, содержащейся в таблице.

1) Назвать промежутки возрастания и убывания функции.

2) Назвать точки максимума и минимума, если они есть.

3) Построить схематический график функции.

x	$(-\infty; -3]$	-3	$[-3; 0]$	0	$(0; +\infty)$	3
Характер изменения и значения $f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-5	$\nearrow$	0
$g(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	-4
$q(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$	не сущ.	$\nearrow$	-5

Следует обратить внимание на то, что при $x = -3$ функция имеет разрыв, в противном случае правая граница интервала $(-\infty; -3)$ присоединилась бы к промежутку монотонности, а значит, точка -3 может не быть точкой экстремума.

Домашнее задание. п. 6, № 74, 75 (3).

Зачет по теме "Производная функции"

Инструкция к проведению зачета

Зачет проводится по двум вариантам заданий, которые могут быть записаны на доске или на карточках. Ученики, первыми выполнившие все задания, подходят с работой к учителю. Учитель проверяет работу и задает по ходу проверки теоретические вопросы. Ученики, которые правильно решили все задания и ответили на вопросы учителя, считаются сдавшими зачет и становятся консультантами, которым выдается таблица и список устных вопросов и заданий. Из списка вопросов и заданий помощник задаст один вопрос и оценит ответ на него, также как и все задания знаком "+", если ответ или решение верно или знаком "–", если задание не выполнено или выполнено неверно. Остальные ученики могут сдать зачет учителю или консультанту. Учитель просматривает таблицы у консультантов, видит общую картину сдачи зачета, оказывает индивидуальную помощь ученикам.

№	Фамилия И.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.										
2.										

Напомним, что ученики, которым не удалось на этом уроке сдать зачет (т.е. ответить на удовлетворительную оценку) будут сдавать зачет учителю на следующих уроках, переменах или после уроков.

Задания для письменной части зачета

Вариант 1

1. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = 2x^2 + 1$ в его точке с абсциссой, равной –1, зная, что ее производная $y' = 4x$.

2. Изобразите график непрерывной функции $y = f(x)$, зная, что:

1) область определения функции есть промежуток [–5; 4];

2) значения функции составляют промежуток [–4; 5];

3) $f'(x) > 0$ для любого x из промежутка (–1; 2), $f'(x) < 0$ для любого x из промежутков (–5; –1) и (2; 4), $f'(x) = 0$ при $x = 2$;

4) нули функции:–1 и 3.

3. Постройте схематический график функции $y = 3x^3 - 4x$, зная, что ее производная $f'(x) = 9x^2 - 4$.

Вариант 2

1. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = 3x^2 - 1$ в его точке с абсциссой, равной –1, зная, что ее производная $y' = 6x$.

2. Изобразите график непрерывной функции $y = f(x)$, зная, что:

1) область определения функции есть промежуток [–3; 3];

2) значения функции составляют промежуток [–3; 4];

3) $f'(x) < 0$ для любого x из промежутка (–3; 0), $f'(x) > 0$ для любого x из промежутков (0; 2) и (2; 3), $f'(x) = 0$ при $x = 2$;

4) нули функции: –1 и 2.

3. Постройте схематический график функции $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2$, зная, что ее производная $f'(x) = x^2 + 2x$.

Ответы к зачету

Вариант 1. 1. $y = -4x - 1$. **Вариант 2. 1.** $y = -6x - 1$.

Задания и вопросы для устной части зачета

1. Сформулируйте определение касательной к окружности.

2. Что называют касательной к графику функции?

3. Как Вы понимаете, что такое секущая к графику функции?

4. Верно ли, что любая функция непрерывна в точке, в которой к ее графику проведена касательная?

5. Верно ли, что в любой точке, где функция непрерывна, к ее графику можно провести касательную?

6. Сколько существует касательных к графику функции $y = \cos x$, параллельных оси абсцисс?

7. Что можно сказать о точке графика функции, в которой угловой коэффициент касательной положителен?

8. Укажите множество абсцисс точек графика функции $y=x^2$, в которых касательные к этому графику имеют положительные угловые коэффициенты.

9. Какие знаки имеют угловые коэффициенты касательных, проведенных к графику функции $y = \sqrt{x}$?

10. Назовите промежутки монотонности графика функции $y = |x|$.

11. Объясните, почему приращение функции $y = x$ равно ее дифференциалу.

12. Почему производную функции называют скоростью ее изменения?

13. Что называют производной функции?

14. Как ты понимаешь, что такое приращение функции и приращение аргумента.

15. Как производная функции связана с касательной к графику этой функции?

16. Может ли график непрерывной функции не иметь касательной в точке? Приведите пример.

17. Может ли периодическая функция иметь единственную точку экстремума?

18. Является ли точка убывания внутренней точкой области определения?

19. В каком случае функция, убывающая на каждом из двух непересекающихся промежутков, убывает и на их объединении?

20. Запишите общий вид точек максимума функции $y = \sin x$.

21. Запишите общий вид промежутков возрастания функции $y = \cos x$.

Контрольная работа № 2
Тема "Производная функции"

Вариант 1

I *уровень*

В заданиях 1–4 укажите номер ответа, который вы считаете верным.

1. Укажите функцию, возрастающую на всей своей области определения:

А. $y=-\frac{1}{x}$; Б. $y=5$; В. $y=\sin x$; Г. $y=\sqrt{x}$.

2. Если значения производной во всех точках промежутка отрицательны, то функция на этом промежутке:

А. Возрастает; В. не изменяется;
Б. убывает; Г. другой ответ.

3. Если производная функции при переходе через точку x_0 меняет знак с минуса на плюс, то в этой точке данная функция:

А. Имеет максимум; В. возрастает;
Б. имеет минимум; Г. другой ответ.

4. Функция $y=x^2+x-6$ возрастает на промежутке:

А. $(-3;2)$; Б. $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$; В. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$; Г. другой ответ.

II *уровень*

5. Запишите уравнение касательной к графику функции $y=3x^2-2x-1$ в его точке с абсциссой, равной 1, если $y'=6x-2$.

6. Изобразите график непрерывной функции $y=f(x)$, зная, что:

1) область определения функции есть промежуток [–5; 4];

2) значения функции составляют промежуток [–4; 5];

3) $f'(x)>0$ для любого x из промежутка (–1; 2), $f'(x)<0$ для любого x из промежутков (–5; –1) и (2; 4), $f'(x)=0$ при $x=2$;

4) нули функции: –1 и 3.

7. Тело движется по прямой так, что расстояние s до него от некоторой точки A этой прямой изменяется по закону $s=0{,}5t^2+3t+8$ (м), где t (с) – время движения. Через какое время после начала движения скорость тела окажется равной 15 м/с, если $s'(t)=t+3$?

III *уровень*

8. Найдите производную функции $y=\frac{2}{\sqrt{x}}$, пользуясь определением.

9. Постройте схематический график функции $y = 3x^3 - 4x$, производная которой $f'(x)=9x^2-4$.

Вариант 2

I *уровень*

В заданиях 1–4 укажите номер ответа, который вы считаете верным.

1. Укажите убывающую на всей области определения функцию:

А. $y=-x^3$; Б. $y=5$; В. $y=\sin x$; Г. $y=\sqrt{x}$.

2. Если значения производной во всех точках промежутка положительны, то функция на этом промежутке:

А. возрастает; В. не изменяется;

Б. убывает; Г. другой ответ.

3. Если производная функции при переходе через точку x_0 меняет знак с плюса на минус, то в этой точке данная функция:

А. имеет максимум; В. убывает;

Б. имеет минимум; Г. другой ответ.

4. Функция $y = -x^2 - x + 6$ возрастает на промежутке:

А. $(-3;2)$; Б. $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$; В. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$; Г. другой ответ.

II *уровень*

5. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = x^2 + 3x - 2$ в его точке с абсциссой, равной 1, если $y' = 2x + 3$.

6. Изобразите график непрерывной функции $y = f(x)$, зная, что:

1) область определения функции есть промежуток [–3; 3];

2) значения функции составляют промежуток [–3; 4];

3) $f'(x) < 0$ для любого x из промежутка (–3; 0), $f'(x) > 0$ для любого x из промежутков (0; 2) и (2; 3), $f'(x) = 0$ при $x = 2$;

4) нули функции: –1 и 2.

7. Тело движется по прямой так, что расстояние s до него от некоторой точки A этой прямой изменяется по закону $s = 0{,}5t^2 + 5t - 2$ (м), где t (с) – время движения. Через какое время после начала движения скорость тела окажется равной 12 м/с, если $s'(t) = t + 5$?

III *уровень*

8. Найдите производную функции $y = x^3 - 2x$, пользуясь определением.

9. Постройте схематическиq график функции $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2$, производная которой $f'(x) = x^2 + 2x$.

Ответы к контрольной работе

Вариант 1. 1. 4. **2.** 2. **3.** 2. **4.** 4. **5.** $y = 4x - 4$. **7.** 12 с. **8.** $y' = -\frac{1}{\sqrt{x^3}}$.

Вариант 2. 1. 1. **2.** 1. **3.** 1. **4.** 3. **5.** $y = 5x - 3$. **7.** 7 с. **8.** $y' = 3x^2 - 2$.

ГЛАВА 3
ТЕХНИКА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

В третьей главе школьники знакомятся с формулами и правилами дифференцирования, которые помогают им в исследовании функций, построении графиков, решении задач на наибольшие и наименьшие значения. Учащиеся также узнают о возможностях, которые предоставляет вторая производная, в частности, при определении выпуклости и вогнутости кривых.

7. Производная суммы, произведения и частного функций (4 ч)

В пункте изучаются правила нахождения производной суммы, произведения и частного функций, а также формула производной степени.

Предметные результаты обучения: формулировать и применять правила нахождения производной суммы, произведения, частного, степени; выводить формулу производной суммы функций, находить производную функции в точке; составлять уравнение касательной к графику функции в точке; решать задачи с физическим содержанием; находить промежутки монотонности и экстремумы функции; строить схематически график функции.

Метапредметные результаты обучения: решать прикладные задачи с помощью производной; строить графики функций с помощью компьютерных программ.

Цель первого урока: изучение формул производной суммы и произведения функций, а также производной степенной функции, что дает школьникам возможность находить производные многочленов.

Комментарии. Сначала на доске следует показать, как приращение суммы складывается из приращений слагаемых:

$$f(x) = u(x) + v(x),\ \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = [u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)] - [u(x) + v(x)] =$$
$$[u(x + \Delta x) - u(x)] + [v(x + \Delta x) - v(x)] = \Delta u + \Delta v.$$

Затем по учебнику рассматривается вывод формулы производной суммы функций. Формула демонстрируется учителем на доске, читается словесная ее формулировка, обсуждается, как найти производную разности функций. Полезно показать школьникам более подробные выкладки для приращения разности:

$$\Delta(u - v) = [(u + \Delta u) - (v + \Delta v)] - [u - v] = [(u + \Delta u) - u] - [(v + \Delta v) - v] =$$
$$= \Delta u - \Delta v.$$

После добавления в формулу знака «минус» учащиеся вслух читают формулировку сначала для производной суммы, а затем для производной разности функций.

После этого школьники по учебнику рассматривают и обсуждают вывод формулы производной произведения двух функций и читают ее формулировку. Обязательно изучается формулировка частного случая этой формулы, когда один из множителей – число.

Фронтально разбирается пример 1, в котором в процессе нахождения производной многочлена выводится формула производной степени. Декларируется справедливость этой формулы для произвольных показателей степени и рассматривается по учебнику пример 2. Затем школьники приступают к выполнению заданий из № 81 (1–4), 82 (2, 4). Перед выполнением № 82 все его задания фронтально разбираются с классом.

Домашнее задание. п. 7, № 81 (5, 6), 82 (1, 3), 98 (1).

Цель второго урока: закрепление правил нахождения производных суммы, разности и произведения функций; изучение правила нахождения производной частного функций.

Комментарии. Начать урок можно с повторения школьниками словесных формулировок правил дифференцирования, после чего им предлагается устно найти производные некоторых функций.

Устная работа

Найдите производную функции:

1) $y = 5$;	6) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$;
2) $y = -x$;	7) $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2x^3}}$;
3) $y = \sqrt{x}$;	8) $y = x^2 + 1$;
4) $y = 3x$;	9) $y = 2 - x^3$;
5) $y = x^k$;	10) $y = 2x^2 + 7x + 6$.

Перед тем, как школьники приступят к самостоятельной работе с № 98 (2), фронтально обсуждается выполнение домашнего примера № 98 (1). По сравнению с решением аналогичных заданий в предыдущем пункте в решение добавился один шаг – нахождение производной данной функции по правилам дифференцирования.

№ 98 (1). Р е ш е н и е.

(1) Находим производную:

$$y' = \left(x^3 - 3x^2 + 3x + 2\right)' = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2.$$

(2) Находим критические точки и промежутки знакопостоянства производной: $y' = 0$ при $x = 1$, $y' > 0$ при $x \neq 1$.

(3) Заполняем таблицу исследования функции.

x	$(-\infty; 1]$	1	$[1; +\infty)$	0
y'	+	0	+	
y	$\nearrow$	3	$\nearrow$	2

4) Строим график. После построения схематического графика по результатам исследования полезно показать график, построенный, например, в программе GeoGebra. Ученики должны сравнить свои графики с графиком, построенным программой, и убедиться, что характеристические свойства у графиков совпадают.

№ 98 (2). Р е ш е н и е.

(1) Находим производную:

$$y' = (x^2(x-2))' = 2x(x-2) + x^2 \cdot 1 = 3x^2 - 4x = x(3x-4).$$

(2) Находим критические точки и промежутки знакопостоянства производной: $y' = 0$ при $x = 0$ и при $x = \frac{4}{3}$; $y' > 0$ при $x < 0$ и при $x > \frac{4}{3}$, $y' < 0$ при $0 < x < \frac{4}{3}$.

(3) Заполняем таблицу исследования функции.

x	$(-\infty; 0]$	0	$[0; \frac{4}{3}]$	$\frac{4}{3}$	$\left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$	2
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	↘	0	↗	$-\frac{32}{27}$	↘	0

4) Строим схематический график. И здесь, как и в предыдущем задании полезно сравнить с графиком, построеннмй в программе GeoGebra.

После обсуждения результатов работы рассматривается формула производной частного, и как она используется в примере 4. Следует обратить внимание на возможность экономии времени при заполнении таблицы – из нее убрана строка, содержащая информацию о значениях производной.

В завершение урока обсуждается № 84. Школьники находят в учебнике совет к выполнению задания, прикладывают линейку и делают выводы:

1) $f_{max}(x) < 0$ или $f_{min}(x) > 0$;

2) $f_{max}(x) = 0$ или $f_{min}(x) = 0$;

3) $f_{max}(x) > 0$, а $f_{min}(x) < 0$.

Эти выводы помогают в решении № 86, в котором сначала надо найти экстремумы функции $f(x) = 6x^3 - 2x + a$.

Эта часть задания выполняется фронтально.

$f'(x) = 18x^2 - 2$, $18x^2 - 2 = 0$, $x^2 = \frac{1}{9}$, $x_{1,2} = \pm\frac{1}{3}$ (рис. 3).

Рис. 3

$$f_{max}(x) = f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{6}{27} + \frac{2}{3} + a = a + \frac{4}{9},$$

$$f_{min}(x) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{6}{27} - \frac{2}{3} + a = a - \frac{4}{9}.$$

Далее имеем: 1) $a + \frac{4}{9} < 0$ или $a - \frac{4}{9} > 0$, $a < -\frac{4}{9}$ или $a > \frac{4}{9}$.

2) $a + \frac{4}{9} = 0$ или $a - \frac{4}{9} = 0$, $a = \pm\frac{4}{9}$. 3) $\begin{cases} a + \frac{4}{9} > 0, \\ a - \frac{4}{9} < 0, \end{cases}$ $-\frac{4}{9} < a < \frac{4}{9}$.

Домашнее задание. п.7, № 89, 93, 96.

Цель третьего урока: формирование умения школьников применять правила дифференцирования для исследования функции, составления уравнения касательной к графику функции и вычисления приближенного значения функции в точке.

Комментарии. В начале урока полезно проконтролировать усвоение материала учащимися с помощью теста.

Тест

1. Найдите точку минимума функции $y = x^3 - 3x^2$.

А. 0; Б. 2; В. –2; Г. $\frac{1}{3}$.

2. Найдите точку максимума функции $y = 4x - x^4$.

А. 0; Б. –1; В. 1; Г. –2.

3. Найдите тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y = 0{,}5x^2$ в его точке $x_0 = -3$.

А. –3; Б. –4,5; В. 3; Г. 0.

4. Найдите значение производной функции $y = \frac{x}{x-1}$ в точке $x = 0$.

А. 1; Б. 0; В. 0,5; Г. –1.

5. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x - \frac{1}{x^2}$ в его точке с абсциссой, равной 1.

А. $y = 1 - x$; Б. $y = 3x - 1$; В. $y = x + 1$; Г. $y = 3x - 3$.

Ответы к тесту: 1. Б. **2.** В. **3.** А. **4.** Г. **5.** Г.

Затем рассматривается задача № 97, в которой школьники вспоминают о нерешенной в свое время проблеме, связанной с графиком функции $y = \frac{x^2}{x+1}$. Эта функция имеет максимум, который теперь ученики смогут найти.

Для этого сначала по формуле производной частного они находят производную функции: $y' = \left(\frac{x^2}{x+1}\right)' = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$.

Поскольку функция y имеет производную в каждой точке своей области определения ($x \neq -1$), критические точки функции являются нулями производной.

Находим критические точки функции: $y' = 0$ при $x = 0$ и при $x = -2$. Нас интересуют координаты точки A (с.24, рис.15). Ее абсцисса отрицательна, значит, она равна –2. Найдем ординату этой точки: $\frac{(-2)^2}{-2+1} = -4$. Затем можно вместе со школьниками составить таблицу исследования для функции $y = \frac{x^2}{x+1}$ и занести в нее всю имеющуюся о функции информацию.

План исследования функции полезно записать на доске:

(1) Найти область определения функции.

(2) Найти производную, критические точки, промежутки монотонности, точки экстремума.

(3) Проверить функцию на наличие асимптот и найти их, если они есть.

(4) Составить таблицу исследования функции.

(5) Изобразить схематически график функции.

Поскольку график функции имеет горизонтальную и вертикальную асимптоты, то в таблицу включаем и информацию об асимптотах (выделено жирным шрифтом).

x	**$-\infty$**	$(-\infty; -2]$	-2	$[-2; -1)$	**-1**	$(-1; 0]$	0	$[0; +\infty)$	**$+\infty$**
y	**$x - 1$**	↗	-4	↘	**∞**	↘	0	↗	**$x - 1$**

В завершение урока обсуждается планы решения заданий из № 91, 98 (3). Эти задания ученики выполняют дома.

Домашнее задание. п.7, № 91, 92, 98(3).

Цель четвертого урока: закрепление изученного материала.

Комментарии. В начале урока обсуждаются результаты домашней работы. При обсуждении № 91 полезно показать, что производную можно было найти без формулы производной частного:

$$y' = \left(\frac{x+3}{x}\right)' = \left(1 + 3x^{-1}\right)' = -3x^{-2} = -\frac{3}{x^2}.$$

Затем школьникам предлагается небольшая (на 10 минут) самостоятельная работа из четырех заданий с одной и той же функцией.

Самостоятельная работа

Дана функция $y = 2x^4 - 3x + 1$.

1) Найдите производную $y = f(x)$.

2) Найдите приближенное значение $f(2{,}01)$.

3) Составьте уравнение касательной к графику $y = f(x)$ в его точке с абсциссой $x = 2$.

4) Постройте схематически график функции.

Работа проверяется по решениям, выполненным школьниками на крыльях доски.

Ученикам предлагаются задачи с прикладным содержанием, обсуждаются и формулируются планы решения № 88, 94, 95.

№ 88, 94 можно решить в классе, а №95 задать на дом.

В заключение урока несколько минут посвящается задаче № 87. Строгого доказательства от учеников не требуется, достаточно графической иллюстрации. Можно напомнить о теореме Лагранжа, здесь также рассматривается точка графика функции, наиболее удаленная от оси абсцисс.

Домашнее задание. п.7, № 95, 98 (4), контрольные вопросы и задания.

8. Производная сложной функции (2 ч)

Со сложными функциями школьники встречались неоднократно. Особенно активно они использовались при решении уравнений и неравенств методом подбора в 10 классе.

В данном пункте изучается правило нахождения производной сложной функции и применение производной сложной функции для нахождения точек экстремума, исследования функции и построения ее графика. Знание формулы производной сложной функции существенно расширяет возможности школьников в применении производных.

Предметные результаты обучения: выделять в сложной функции внешнюю и внутреннюю функции; вычислять значение производной сложной функции; формулировать правило нахождения производной сложной и неявной функций; применять формулу производной сложной функции при ее исследовании и построении графика.

Метапредметные результаты обучения: строить графики сложных функции и проводить касательные к ним с применением пакетов компьютерных программ.

Цель первого урока: формирование понятия сложной функции и умения находить ее производную.

Комментарии. В начале урока можно провести самостоятельную работу в двух вариантах на оценку по материалу предыдущего пункта.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Найдите производную функции $y=\dfrac{x^2+4}{x}$.

2. Найдите координаты точек пересечения с осью ординат касательных к графику функции $y=\dfrac{2x-1}{x+3}$, имеющих угловой коэффициент 7.

Вариант 2

1. Найдите производную функции $y=\dfrac{x^2}{1+x}$.

2. Найдите координаты точек пересечения с осью ординат касательных к графику функции $y=\dfrac{3x-1}{x+8}$, имеющих угловой коэффициент 1.

Ответы к самостоятельной работе

Вариант 1. 1. $y'=\dfrac{x^2-4}{x^2}$. 2. (0; 9),(0; 37).

Вариант 2. 1. $y'=\dfrac{2x+x^2}{(1+x)^2}$. 2. (0; 1), (–1; 0), (0; 21), (–21; 0).

После проверки самостоятельной работы переходим к новому материалу. Начать можно с задачи на нахождение промежутков монотонности и экстремумов функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

При обсуждении рассматриваются следующие в о п р о с ы.

1) Каковы ограничения на область определения функции? [Под корнем в знаменателе стоит квадратный трехчлен с отрицательным дискриминантом, поскольку его старший коэффициент положителен, все значения трехчлена положительны и, значит, функция y определена на всей числовой прямой.]

2) Что происходит с выражением, стоящим под знаком корня при изменении значений x? [Функция $y = x^2 + 2x + 5$ имеет минимум при $x = -1$ – абсцисса вершины соответствующей параболы $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2} = -1$. Возрастает квадратный трехчлен на промежутке $[-1; +\infty)$, а убывает на промежутке $(-\infty; -1]$.]

3) Что при этих значениях x происходит с корнем? [Поскольку большему значению подкоренного выражения соответствует большее значение корня, то точка минимума и промежутки монотонности функции $y = \sqrt{x^2+2x+5}$ совпадают с точкой минимума и промежутками монотонности квадратного трехчлена.]

4) Что можно сказать о промежутках монотонности дроби? [Чем больше знаменатель дроби (речь идет о положительных ее значениях), тем меньше значение дроби. Значит, промежутки убывания квадратного трехчлена являются промежутками возрастания дроби, а промежутки возрастания квадратного трехчлена являются промежутками убывания дроби. Самое большое свое значение дробь принимает тогда, когда ее знаменатель минимален. Таким образом, функция $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ имеет максимум при $x = -1$, возрастает на промежутке $(-\infty; -1]$, а убывает на промежутке $[-1; +\infty)$]

При выполнении задания был использован тот факт, что функция $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ состоит из более простых внутренних функций:

$v(x) = x^2 + 2x + 5$, $u(v) = \sqrt{v}$, $y(u) = \dfrac{1}{u}$. Такие функции называют *сложными*. Можно записать, что $y = y(u(v(x)))$. При этом функция $y(u)$ – внешняя для $u(v)$, $u(v)$ внешняя для $v(x)$, а $v(x)$ внешняя для x.

После обсуждения фронтально выполняются задания из № 99,100.

Затем по учебнику рассматривается вывод формулы производной сложной функции. После чего рассматривается № 101.

1) Здесь $y = u(f(x))$, где $u(f) = \sqrt{f}$. $u'_f = \dfrac{1}{2\sqrt{f}}$ и $y' = (u(f(x)))' = \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

2) Здесь $y = f(v(x))$, где $v(x) = \sqrt{x}$. $v' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ и $y' = (f(v(x)))' = \dfrac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

В № 102 (1, 3) школьники устно выделяют внешнюю и внутреннюю функции.

Домашнее задание. п. 8, Пример 1, № 102 (2, 4), 104 (1).

Цель второго урока: закрепление умения школьников находить производную сложной функции и применять ее.

Комментарии. Начинается урок с обсуждения трудностей, которые встретились при выполнении домашнего задания.

Затем разбирается № 104 (2).

Р е ш е н и е. Найдем производную функции: $y' = 2((x+2)^3 - 1)\cdot 3(x+2)^2$.

При $x = 0$ $y_0 = 49$, $y_0' = 168$.

Запишем уравнение касательной: $y = 168x + 49$.

В заключение урока можно предложить самостоятельную работу с последующей фронтальной проверкой.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Исследуйте функцию $y = \sqrt{4x - x^2}$ и постройте ее график.

2. При каком a значение x = 4 является точкой максимума функции $y = \dfrac{2^{ax+7}}{2^{x^2}}$?

Вариант 2

1. Исследуйте функцию $y = \sqrt{2x - x^2}$ и постройте ее график.

2. При каком a значение x=1 является точкой максимума функции $y = \dfrac{0{,}1^{ax^2+7}}{0{,}1^{x}}$?

Ответы к самостоятельной работе

Вариант 1. 2. a = 8. **Вариант 2. 2.** $a = \dfrac{1}{2}$.

После завершения самостоятельной работы решения ее заданий следует обсудить. Задания обоих вариантов аналогичны, поэтому можно обсудить первое задание из первого варианта и второе задание из второго варианта.

Р е ш е н и е. № 1 (Вариант 1).

Найдем область определения функции:

$4x - x^2 \geq 0,\ x(4-x) \geq 4.$ $D(y)$ = [0;4].

Найдем производную функции:

$$y' = \left(\sqrt{4x - x^2}\right)' = \frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}} = \frac{2-x}{\sqrt{4x-x^2}}.$$

Найдем критические точки: $x_1 = 2$ - единственная критическая точка, $x_{\max} = 2$, $y_{\max} = 2$.

Заполним таблицу.

x	[0; 2]	2	[2; 4]	0	4
y'	+	$\cap$	–		
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	0

Построим схематически график функции. На самом деле график представляет собой полуокружность.

Р е ш е н и е. № 2 (Вариант 2).

По свойствам степеней с равными основаниями $y = 0{,}1^{ax^2-x+7}$. Показательная функция с основанием 0,1 убывает. Значит, промежутки возрастания функции y совпадают с промежутками убывания функции $u = ax^2 - x + 7$, а промежутки убывания y совпадают с промежутками возрастания u. Функция y имеет максимум в точке минимума функции u. Функция u как квадратный трехчлен при $a > 0$ имеет минимум в точке $x_0 = -\frac{-1}{2a} = \frac{1}{2a}$. По условию должно быть $\frac{1}{2a} = 1$, $a = \frac{1}{2}$.

Домашнее задание. п. 8, № 104 (3), 103, контрольные вопросы и задания к пункту.

9. Формулы производных основных функций (6 ч)

В данном пункте изучается определение числа e графическим способом и через предел последовательности;

Изучив правила дифференцирования и формулу производной сложной функции, школьники знакомятся с производными основных элементарных функций. Применяют формулы при исследовании функций, построении их графиков, составлении к ним уравнений касательных, нахождении точек экстремума и приближенных значений функций, т.е. при решении всех типов ранее изученных задач.

Предметные результаты обучения: проводить исследование изученных функций, строить к ним касательные, находить их приближенные значения; решать задачи физического содержания о нахождении скорости радиоактивного распада, о скорости изменения силы тока и др.; применять формулы и правила дифференцирования при исследовании функций на монотонность и экстремумы в ситуациях, не требующих сложных преобразований.

Метапредметные результаты обучения: строить графики, считывать информацию с графиков функций и использовать в познавательной и социальной практике; применять математические знания к решению прикладных задач.

Цель первого урока: знакомство школьников с выводом формул производных функций $y = e^x$ и $y = \sin x$ и формирование умения применять таблицу производных основных элементарных функций к решению задач.

Комментарии. Начинается урок с фронтального обсуждения №105, а затем ученикам предлагается самостоятельная работа по материалу предыдущего пункта.

Самостоятельная работа

Найдите производную функции:

1) $y = (x^3 - 3x^2 + x - 7)^2$; 2) $y = x^3(x + 2)^2$; 3) $y = \sqrt[5]{x^3 - x}$.

Ответы к самостоятельной работе

1. $y' = 2\left(x^3 - 3x^2 + x - 7\right)\left(3x^2 - 6x + 1\right)$.

2. $y' = 3x^2\left(x + 2\right)^2 + 2x^3(x + 2) = x^2\left(x + 2\right)\left(5x + 6\right)$.

3. $y' = \dfrac{3x^2 - 1}{5\sqrt[5]{\left(x^3 - x\right)^4}}$.

Начинается изучение нового материала: по учебнику вводится число *e*.

Затем по учебнику разбирается вывод формулы производной функции $y = e^x$, и школьники применяют ее в № 106 (1). После выполнения этого задания, выведенная формула производной записывается для сложной функции в виде $(e^u)' = e^u \cdot u'$. И уже с помощью этой формулы, предварительно называя u и u', выполняется № 107 (1, 2).

По учебнику рассматривается рисунок 67 на странице 73 и вводятся еще два замечательных предела $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ и $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg} x}{x} = 1$.

По учебнику разбирается вывод формулы производной функции $y = \sin x$, а после решения № 106 (4) записывается производная синуса для сложной функции $(\sin u)' = u'\cos u$. С помощью этой формулы, предварительно называя u и u', школьники находят производные следующих функций: $\sin 2x$, $\sin(x^2 + x)$, $\sin\sqrt{x}$, $\sin e^x$ и $e^{\sin x}$.

Закрепляется материал при выполнении № 112 (2).

Домашнее задание. п. 9, № 106 (2), 111 (3), 114 (1).

Цель второго урока: формирование умений находить производные функций: $y = a^x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$ и $y = \mathrm{ctg}\, x$, $y = \log_a x$ и применять их для выполнения всех изученных типов заданий.

Математический диктант

Вариант 1	**Вариант 2**
Напишите формулу производной:	
1) произведения двух функций;	1) частного двух функций;
2) степенной функции;	2) функции $y=e^x$;
3) функции $y=e^x$;	3) степенной функции;
4) степенной функции;	4) функции $y=e^x$
Вычислите производную функции:	
6) $f(x) = 2x^3$ при $x = 2$;	6) $f(x) = 3x^4$ при $x = 2$;
7) $f(x) = \dfrac{4}{\sqrt{x}}$ при $x = 1$.	7) $f(x) = 5\sqrt[3]{x}$ при $x = 1$.

Ответы к математическому диктанту

Вариант 1. 6) $f'(2) = 24$. 7) $f'(1) = -2$.

Вариант 2. 6) $f'(2) = 96$. 7) $f'(1) = \frac{5}{3}$.

После проверки математического диктанта весь класс участвует в выводе формул на доске. Сначала преобразуются функции:

$$a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x\ln a};\ \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right);\ \mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x};\ \mathrm{ctg}x = (\mathrm{tg}x)^{-1}.$$

Затем, по желанию, ученики выходят к доске, где с помощью класса выводят производные. Ученики на местах в процессе вывода записей в тетрадях не делают.

$$\left(a^x\right)' = \left(\left(e^{x\ln a}\right)\right)' = e^{x\ln a}(x\ln a)' = a^x \ln a;$$

$$\cos' x = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\cdot\left(x + \frac{\pi}{2}\right)' = -\sin x;$$

$$\mathrm{tg}'x = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$\mathrm{ctg}'x = \left((\mathrm{tg}x)^{-1}\right)' = -1\cdot(\mathrm{tg}x)^{-2}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = -\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x\cos^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Затем классу предлагается записать в тетради эти формулы применительно к сложной функции:

$$\left(a^u\right)' = u'a^u\ln a,\ (\cos u)' = -u'\sin u,\ (\mathrm{tg}u)' = \frac{u'}{\cos^2 u},\ (\mathrm{ctg}u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}.$$

Записав формулы, школьники самостоятельно, с проверкой на крыльях доски, выполняют задания № 107 (3), 111 (1, 2, 4,), 112 (1).

Домашнее задание. п.9, № 110 (1, 2), 112 (3). Начать составлять карточку формул производных, занося туда изученные формулы. Ученикам на протяжении ряда уроков будет разрешено пользоваться своими карточками при выполнении заданий.

Функция	**Производная**
C	**0**
u^r	$ru'u^{r-1}$
e^u	$e^u u'$
…	…

Цель третьего урока: изучение формул производных обратных тригонометрических функций и закрепление всех ранее изученных формул производных.

Комментарии. В начале урока обсуждается и проверяется домашнее задание. Затем школьникам предлагается математический диктант, проверяющий знание формул производных изученных функций.

Математический диктант

Вариант 1	**Вариант 2**
Найдите производные следующих функций:	
1) $y = 0{,}2^x$;	1) $y = \left(\dfrac{2}{3}\right)^x$;
2) $y = \sin x$;	2) $y = \cos x$;
3) $y = \operatorname{ctg} x$;	3) $y = \operatorname{tg} x$;
4) $y = \cos^2 x$;	4) $y = \sin^2 x$;
5) $y = \operatorname{tg} x^2$;	5) $y = \operatorname{ctg} x^2$;
6) $y = e^{x^2-3x}$	6) $y = e^{\cos 3x}$

Мы не стали помещать в учебник выводы производных обратных функций, однако, если базовый уровень класса выше среднего, можно обсудить использование формулы производной сложной функции для вывода формул и после проверки математического диктанта показать вывод формулы производной логарифмической функции.

Равенство $y = \log_a x$ при $a > 0$, $a \neq 1$ задает ту же связь между x и y, что и равенство $x = a^y$, правая часть которого является сложной функцией.

Находим производные от обеих частей: $x' = 1$, $(a^y)' = y'a^y \ln a$. Получаем $1 = y'a^y \ln a$, $y' = \dfrac{1}{a^y \ln a}$, $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$. Применительно к сложной функции формула будет такой $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$. При $a = e$ $\log_a x = \ln x$ и формула принимает вид $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$.

О производных обратных тригонометрических функций достаточно сказать, что их формулы выводятся аналогично.

После этого можно предложить школьникам № 111 (6), 120 (1, 6), 121 (1). В задании № 120 (6) нет необходимости находить производную – проще воспользоваться совпадением промежутков возрастания функции y с промежутками убывания внутренней функции.

Домашнее задание. п. 9, № 111 (8), 115 (1, 3).

Цель четвертого урока: закрепление умений школьников находить производные изученных функций и применять полученные знания для решения задач.

Комментарии. В начале урока обсуждается и проверяется домашнее задание.

После этого фронтально обсуждаются возможности различных приложений производной, обсуждается план выполнения каждого задания и решение доводится до ответа.

Устная работа

1. Как с помощью производной доказать, что функция:

1) $y = 5x$ является возрастающей;

2) $y = 100 - x^2$ является убывающей на промежутке $[0; +\infty)$?

2. Найдите производную функции $y = \mathrm{tg}x - 2\sin 2x$ при $x = -\frac{\pi}{4}$.

3. Найдите координаты точки графика функции $y = e^{2x}$, в которой угловой коэффициент касательной к нему равен 2.

4. Тело движется по прямой так, что расстояние s до него от некоторой точки A этой прямой изменяется по закону $s(t)$, где t – время движения в секундах.

а) $s(t) = 0{,}5t^2 + 3t + 4$ (м); б) $s(t) = 4 - 2\sin 2t$.

1) По какому закону изменяется скорость движения тела?

2) Найдите скорость тела через 1 с после начала движения в случае а).

3) Найдите скорость движения тела в момент времени $t = \frac{\pi}{3}$ в случае б).

Затем школьники выполняют задания из № 116 (2–4), обсуждаются № 120 (5), 123, 124. После обсуждения задания выполняются школьниками с проверкой каждого из заданий. В № 124 школьники сначала должны сформулировать вывод о том, что касательная к графику функции в точке ее экстремума имеет вид $y = a$, а затем найти максимум данной функции.

$y' = \frac{2e^{2x} - (2x+1)\cdot 2e^{2x}}{\left(e^{2x}\right)^2} = \frac{-4xe^{2x}}{\left(e^{2x}\right)^2} = -\frac{4x}{e^{2x}}$. Критическая точка $x = 0$. В ней производная меняет знак с «плюса» на «минус», значит, это точка максимума. Сам максимум равен 1. Касательная к графику функции $y = 1$.

Домашнее задание. п. 9, № 108, 114 (2, 4), 119 (1, 3) –устно.

Цель пятого урока: изучение приложений производной.

Комментарии. В начале урока обсуждается и проверяется домашнее задание. Затем школьникам предлагается самостоятельная работа.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Найдите экстремум функции $y = -x - 3e^{-x}$.

2. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $p(x) = 6\cos 2x - \mathrm{tg}x$ в его точке с абсциссой $x = -\frac{\pi}{6}$.

Вариант 2

1. Найдите экстремум функции $y = 2x + 3e^{-x}$.

2. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $h(x) = 6\sin 3x - \mathrm{ctg}x$ в его точке с абсциссой $x = -\frac{\pi}{3}$.

Ответы к самостоятельной работе

Вариант 1. 1. $-\ln 3 - 1$. **2.** $9\sqrt{3}-1\frac{1}{3}$. **Вариант 2. 1.** $2\ln 1{,}5 + 2$. **2.** $-16\frac{2}{3}$.

После проверки самостоятельной работы школьники выполняют номера № 121 (3), 125 с проверкой на крыльях доски.

№ 125. Р е ш е н и е.

$y' = (x^p e^{-x})' = px^{p-1}e^{-x} - x^p e^{-x} = x^{p-1}e^{-x}(p - x)$.

Ответ: функция возрастает на $(0;\, p]$ и убывает на $[p;\, +\infty)$.

З а д а н и е (для сильных учеников). Исследовать функцию $y = x^2e^{-x}$ и построить ее график.

Р е ш е н и е. При построении графика внимание школьников нужно обратить на то, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x} = 0$, а значит, график имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$.

Найдем производную функции: $y' = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = xe^{-x}(2 - x)$.

Заполним таблицу.

x	$-\infty$	$(-\infty;\, 0]$	0	$[0;\, 2]$	2	$[3;\, +\infty)$	$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↗	0,5	↘	0

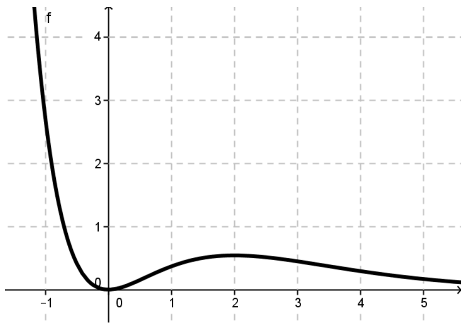


Рис. 4

Построим график функции $y = x^2e^{-x}$ (рис. 4).

Домашнее задание. п. 9, № 126 (1, 2), 130 (4).

Цель шестого урока: закрепление материала пункта.

Комментарии. В начале урока обсуждается и проверяется домашнее задание, проводится устная работа, затем школьникам предлагается самостоятельная работа на два варианта с последующей проверкой.

Устная работа

1. Найдите тангенс угла наклона прямой, касающейся в точке с абсциссой x графика функции:

1) $y = x$; 2) $y = -x$; 3) $y = \sqrt{2}x$; 4) $y = \log_3 x^2$.

2. Найдите скорость тела, движущегося прямолинейно по закону:

1) $s = \sqrt{t}$ в момент $t = 4$; 3) $s = -5\operatorname{tg} t$ в момент $t = \frac{\pi}{4}$;

2) $s = \sqrt[3]{t^2}$ в момент $t = -1$; 4) $s = \sin 2t$ в момент $t = \frac{\pi}{3}$.

Вопросы для обсуждения по ходу выполнения заданий.

1. Каков геометрический смысл производной функции?
2. Каков физический смысл производной функции?

3. Какие из функций, записанных на доске, сложные?
4. Как найти производную сложной функции?
5. Как найти производную степенной функции?

Самостоятельная работа

Вариант 1

На отрезке [–1; 6] исследуйте функцию $q(x) = x^2 \cdot e^{-0,5x}$ и постройте ее график.

Вариант 2

На отрезке [–2; 2] исследуйте функцию $g(x) = x \cdot e^{-0,5x^2}$ и постройте ее график.

Ответы к самостоятельной работе

Вариант 1. Функция непрерывная; возрастает на отрезке [0; 4], убывает на [–1; 0] и на [4; 6]; $q_{min}= q(0) = 0$; $q_{max}= q(4) = 16e^{-2}$ (рис. 5).

Вариант 2. Функция $g(x) = x^2 \cdot e^{-0,5x^2}$ четная и непрерывная; возрастает на [–1;1], убывает на [–2; –1] и на [1; 2]; $g_{min}= g(-1) = -e^{-0,5}$; $g_{max}= g(1) = e^{-0,5}$; (рис. 6).

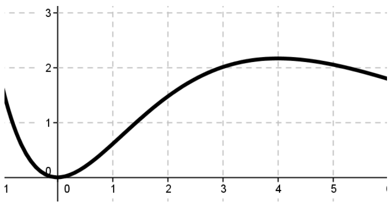


Рис. 5

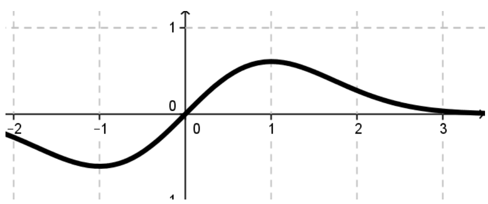


Рис. 6

Затем выполняются задания из № 128 (1, 3), 129 (1, 3), 130 (1–3).

Домашнее задание. п.9, № 128 (2, 4), 129 (2, 4), 130 (4).

Контрольная работа № 3
Тема «Техника дифференцирования»

Вариант 1

1. Тело движется по прямой так, что его расстояние от некоторой точки этой прямой изменяется по закону $s(t) = -t^3 + 6t^2 + 5t + 7$ (м). В какие моменты времени его скорость будет равна 14 м/с?

2. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{x^2 - 4}{x}$ в его точке с абсциссой $x = 2$.

3. Исследуйте функцию $f(x) = x - e^x$ и постройте ее график.

4. Какое из чисел $f(36,8)$, $f(36,9)$, $f(37)$ является наибольшим, если $f(x) = 5\sin 3x - 15x$?

Вариант 2

1. Тело движется по прямой так, что его расстояние от некоторой точки этой прямой изменяется по закону $s(t) = t^3 - 3t^2 + t + 9$ (м). В какой момент времени его скорость будет равна 10 м/с?

2. Запишите уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{x^2}{x+1}$ в его точке с абсциссой $x = 2$.

3. Исследуйте функцию $y = x - \ln x$ на монотонность и экстремумы и постройте ее график.

4. Какое из чисел $f(37)$, $f(37{,}1)$, $f(37{,}2)$ является наибольшим, если $f(x) = 5\cos 4x - 20x$?

Ответы к контрольной работе № 3

Вариант 1. 1. Через 1 с и через 3 с. **2.** $y = 2x - 4$. **3.** Функция возрастает на промежутке $(-\infty; 0]$, убывает на $[0; +\infty)$ $f_{\max} = f(0) = -1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(x - (x - e^x)) = 0$ – график в левой полуплоскости имеет асимптоту $y = x$. (рис. 7). **4.** Поскольку функция $f(x)$ убывающая, $f(36{,}8)$ – наибольшее.

Вариант 2. 1. Через 3 с. **2.** $y = \dfrac{8}{9}x + \dfrac{4}{9}$. **3.** Функция убывает на $(0;1]$, возрастает на $[1;+\infty)$, $f_{\min} = f(1) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+}(x - \ln x) = +\infty$ – функция имеет вертикальную асимптоту $x=0$ (рис. 8). **4.** Поскольку функция $f(x)$ убывающая, $f(37)$ – наибольшее значение.

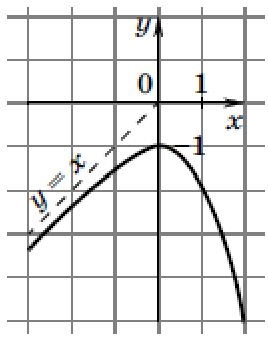


Рис. 7

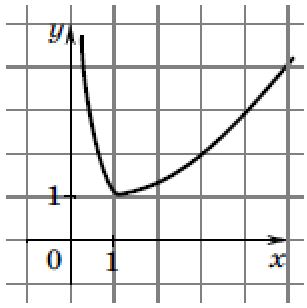


Рис. 8

10. Наибольшее и наименьшее значения функции (5 ч)

В данном пункте изучается наибольшее и наименьшее значения функции на всей области определения функции и на заданном промежутке, т.е. формируются понятия наибольшего и наименьшего значений функции, и школьники учатся находить их как с помощью производной, так и без нее.

Предметные результаты обучения: использовать производные в задачах на нахождение наибольших и наименьших значений функций; решать задачи с практическим, геометрическим и физическим содержанием на нахождение наибольших и наименьших значений.

Метапредметные результаты обучения: строить график функции с применением пакетов компьютерных программ; решать прикладные задачи на нахождение наибольших и наименьших значений функций; составлять план решения задачи и реализовывать его; переводить условие задачи с естественного языка на математический.

Цель первого урока: изучение понятий наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке и формирование алгоритма их нахождения.

Комментарии. Во вступительном тексте пункта упоминаются две ситуации, в которых школьникам уже приходилось находить наибольшее и наименьшее значения выражений. Первая из них, связанная с квадратным трехчленом, не должна вызвать затруднения у класса. Сумма обратно пропорциональных переменных знакома школьникам несколько меньше. В тех классах, которые работали по нашим учебникам, задачи на наименьшее значение суммы обратно пропорциональных переменных встречались с 9 класса.

Полезно в начале урока напомнить школьникам, что при $x > 0$ верно неравенство $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Для доказательства этого неравенства рассматривается разность $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 + 1 - 2x}{x} = \frac{(x-1)^2}{x}$.

С учетом условия $x > 0$, разность неотрицательна, значит, исходное неравенство верно. Равенство достигается при $x = 1$.

Затем с учениками обсуждается № 136.

В № 136 (1) школьники встречаются с суммой взаимно обратных положительных чисел $2^x + \frac{1}{2^x}$, наименьшее значение которой, равное 2, достигается при $x = 0$.

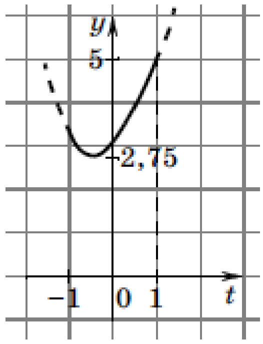


Рис. 9

В № 136 (2) несложно увидеть квадратный трехчлен относительно cos x. Поскольку $-1 \leq \cos x \leq 1$, задача сводится к нахождению множества значений функции $y = t^2 + t + 3$ на отрезке [–1; 1].

Вершина параболы имеет абсциссу $t = -0{,}5$ (рис. 9). В этой точке функция y принимает свое наименьшее значение, а свое наибольшее значение она принимает в точке области определения, наиболее удаленной от –0,5, т.е. при $t = 1$.

Для обозначения наибольшего значения функции y на промежутке [–1; 1] используется обозначение $\max\limits_{[-1;1]} y$, а для обозначения ее наименьшего значения $\min\limits_{[-1;1]} y$.

Используя эти обозначения, запишем, что $\min\limits_{[-1;1]} y = (-0{,}5)^2 - 0{,}5 + 3 = 2{,}75$ и $\max\limits_{[-1;1]} y = 5$.

Дальше идет разговор о наибольшем и наименьшем значениях функции на отрезке. Рассматриваются рисунки 69 и 70 учебника.

Затем фронтально анализируются рисунки 73 из № 132. При обсуждении обращается внимание на то, что на рисунках а), в) и г) наименьшие значения функция имеет в точках минимума.

З а д а н и е. Изобразить в тетрадях график функции, наименьшее значение которой не совпадает с минимумом.

Свои варианты школьники могут показать на доске.

Фронтально формулируется правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке: «Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке, достаточно выбрать наибольшее и наименьшее из значений этой функции на концах отрезка и в ее критических точках, принадлежащих отрезку».

Это правило ученики могут записать в тетрадях. При этом им должно быть понятно, что для применения правила, надо сначала найти критические точки.

После формулировки правила решаются задания № 133 (2, 3, 5).

В № 133 (2) предварительно формулируется *алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значенийя функции на отрезке.*

№ 133 (2). Р е ш е н и е. (1) Найдем критические точки функции на данном отрезке. $f'(x)=\frac{3}{2}x^2-18x+48$, $f'(x)=0$ при $x^2-12x+32=0$, $x_1=4$, $x_2=8$.

(2) Найдем значения функции на концах отрезка и в критических точках.

$f(0)=0$, $f(4)=32-144+192=80$,

$f(8)=256-576+384=64$, $f(9)=364{,}5-729+432=67{,}5$.

(3) Выберем наибольшее и наименьшее из найденных значений.

$\max\limits_{[0;9]} f(x)=80$, $\min\limits_{[0;9]} f(x)=0$.

О т в е т: $\max\limits_{[0;9]} f(x)=80$, $\min\limits_{[0;9]} f(x)=0$.

№ 133 (3). Р е ш е н и е.

(1) Находим критические точки функции.

$f'(x)=4x^3-16x=4x(x^2-4)$. $f'(x)=0$ при $x=0$, $x=-2$ и $x=2$. Промежутку L принадлежит только $x=2$. Эта точка совпадает с концом отрезка L. Если считать отрезок L областью определения функции $f(x)$, то точка $x=2$ не будет внутренней точкой области определения, а значит, не будет критической точкой функции f. Однако в условии прямо не сказано, что $D(f)=L$, и точка $x=2$ имеет право называться критической точкой функции $f(x)$. Так или иначе, поскольку она совпала с концом отрезка, значение функции в ней все равно придется вычислять.

(2) Вычисляем значения функции на концах отрезка и в критической точке: $f(1)=-4$, $f(2)=-13$.

(3) Выбираем наибольшее и наименьшее из найденных значений функции и записываем результат: $\max\limits_{[1;2]} f(x)=-4$, $\min\limits_{[1;2]} f(x)=-13$.

О т в е т: $\max\limits_{[1;2]} f(x)=-4$, $\min\limits_{[1;2]} f(x)=-13$.

Полезно обратить внимание школьников на то, что данная функция является квадратным трехчленом относительно x^2, и, что ее можно заменить функцией $y = t^2 - 8t + 3$, рассматриваемой на отрезке [1; 4]. Решение в этом случае не потребует применения производной.

В № 133 (5) придется решить тригонометрическое уравнение на заданном отрезке.

Р е ш е н и е. (1) Находим критические точки функции:

$f'(x) = 2\cos x + 2\cos 2x$, $f'(x) = 0$ при $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$, $\cos x = -1$ или $\cos x = 0{,}5$. Заданному промежутку принадлежат точки $x = \pi$ и $x = \frac{\pi}{3}$.

(2) Вычисляем значения функции на концах отрезка и в критических точках: $f(0) = 0$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $f(\pi) = 0$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2$.

О т в е т: $\max\limits_{[0;\frac{3\pi}{2}]} f(x) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$, $\min\limits_{[0;\frac{3\pi}{2}]} f(x) = -2$.

Домашнее задание. п.10, № 133 (1, 6), 148.

Цель второго урока: изучение случая, когда функция имеет единственную критическую точку на промежутке.

Комментарии. Урок можно начать с устных упражнений, которые проводятся по рисункам 54–56, 60 на с.54-55 учебника. Школьники отвечают на вопросы о промежутках возрастания, убывания, максимумах, минимумах, наибольших и наименьших значениях функций. Подчеркивается разница понятий максимума и наибольшего значения, минимума и наименьшего значения функции.

Затем обсуждается домашнее задание. № 133 (6) воспроизводится на доске во время устной работы с классом.

№ 133 (6). Р е ш е н и е.

1) Находим критические точки:

$f'(x) = ((x-3)e^x)' = e^x + (x-3)e^x = e^x(x-2)$, $f'(x) = 0$ при $x = 2$.

2) Вычисляем значения функции на концах отрезка и в критических точках: $f(1) = (1-3)e = -2e$, $f(2) = (2-3)e^2 = -e^2$, $f(4) = (4-3)e^4 = e^4$.

О т в е т: $\max\limits_{[1;4]} f(x) = e^4$, $\min\limits_{[1;4]} f(x) = -e^2$.

После разбора этого задания школьникам предлагается самостоятельно решить № 133 (4). Р е ш е н и е.

1) Находим критические точки: $f'(x) = (x - 2\ln x)' = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$.

$f'(x) = 0$ при $x = 2$.

2) Вычисляем значения функции на концах отрезка и в критических точках: $f(\frac{3}{2}) = \frac{3}{2} - 2\ln\frac{3}{2}$, $f(2) = 2 - 2\ln 2$, $f(e) = e - 2$.

До этого момента решение у школьников затруднений вызвать не должно, но дальше перед ними встает трудная задача выбора наименьшего и наибольшего из полученных значений. Учитель предлагает сделать это с помощью микрокалькулятора.

$$f(\frac{3}{2})=\frac{3}{2}-2\ln\frac{3}{2}\approx 0{,}69,\ f(2)=2-2\ln 2\approx 0{,}61,\ f(e)=e-2\approx 0{,}72.$$

Ответ: $\min\limits_{[\frac{3}{2};e]} f(x)=2-2\ln 2,\ \max\limits_{[\frac{3}{2};e]} f(x)=e-2.$

Однако, на экзамене калькулятором, скорее всего, пользоваться не разрешат. Подумаем, как обойтись без калькулятора.

Можно заметить, что при $x > 2$ производная данной функции положительна, значит, функция возрастает на [2; e] и $\min\limits_{[2;e]} f(x)=f(2)$. При $x < 2$ производная отрицательна, значит, функция убывает на промежутке $\left[\frac{3}{2};2\right]$ и принимает наименьшее значение $\min\limits_{[\frac{3}{2};2]} f(x)=f(2)$.

Объединяя указанные отрезки, получаем: $\min\limits_{[\frac{3}{2};e]} f(x)=f(2)$.

Ответ: $\min\limits_{[\frac{3}{2};e]} f(x)=f(2)$.

Таким образом, не вычисляя значений функции и не сравнивая их, мы смогли доказать, что данная функция достигает своего наименьшего значения на указанном промежутке в точке минимума $x = 2$.

Существенным в наших рассуждениях оказалось то, что на заданном промежутке функция имела *единственную критическую точку*, в которой у нее был минимум.

Ученикам предлагается изобразить схематически график непрерывной функции, которая на промежутке имеет единственную критическую точку, в которой у нее максимум. После чего формулируется *свойство единственной критической точки*. Затем школьники находят это свойство в учебнике и читают его. Желательно предложить ученикам подумать, *обязательно ли в этом свойстве требование непрерывности функции*. Требование непрерывности обязательно, в этом можно убедиться с помощью рисунка, на котором функция имеет единственную критическую точку – точку разрыва, имеет в ней максимум, но он не является ее наибольшим значением (рис. 10).

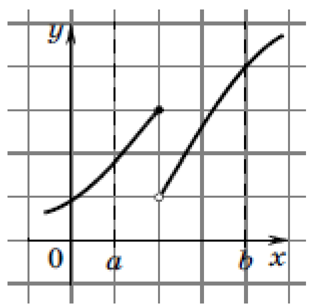


Рис. 10

С помощью *свойства единственной критической точки* решается большинство текстовых задач на наибольшее или наименьшее значение функции.

Работа с такими задачами начинается с обсуждения решения № 138 (2). Как и в текстовых задачах основной школы начинается решение с обозначения неизвестного. Если одно из искомых слагаемых x, то другое $(5 - x)$. Произведение, о котором идет речь в задаче, можно записать, как $x(5 - x)^4$ или $(5 - x)x^4$. Похоже, что второй вариант несколько проще, поэтому будем искать наибольшее значение функции $f(x) = (5 - x)x^4$ на промежутке $(0; 5)$.

$f'(x) = -x^4 + 4x^3(5 - x) = x^3(20 - 5x)$, $f'(x) = 0$ при $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

На промежутке $(0; 5)$ непрерывная функция имеет единственную критическую точку $x = 4$ (рис. 11). В этой точке у нее максимум, а значит, и наибольшее значение на данном промежутке. Само значение в задаче не спрашивается, а число 5 представляется в виде суммы: $5 = 4 + 1$.

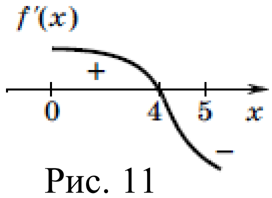


Рис. 11

Учитель записывает решение на доске при активной устной помощи класса. При этом ученики в своих тетрадях ничего не пишут. После завершения решения школьникам предлагается записать его в своих тетрадях и, если при этом возникнут вопросы по решению, то учащиеся должны их задать. Учитель для контроля может спросить: «Почему, например, был выбран интервал (0; 5), а не отрезок [0; 5]?». [В условии задачи требовалось, чтобы оба слагаемых были положительны.]

После обсуждения, что принять за x, предлагается самостоятельно довести до ответа задачу № 138 (4).

№ 138 (4). Р е ш е н и е. $f(x) = x^3 + 3(e - x)$; $D(f) = (0; e)$;
$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$; $f'(x) = 0$ при $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Области определения непрерывной функции $f(x)$ принадлежит единственная критическая точка $x = 1$. В этой точке функция имеет минимум, значит, в ней у нее наименьшее значение.

О т в е т: $e = 1 + (e - 1)$.

После быстрой проверки самостоятельной работы (по записи решения на крыльях доски или с помощью мультимедийного проектора) ученикам предлагается домашнее задание.

Домашнее задание. п.10, № 137, 138 (1, 3).

Цель третьего урока: закрепление умения школьников находить наибольшие и наименьшие значения функций.

Комментарии. Урок можно начать с небольшой самостоятельной работы.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 12x - x^3$ на отрезке $[-1; 3]$.

2. Число 15 представьте в виде суммы двух положительных чисел так, чтобы произведение квадрата первого из них на второе было наибольшим.

Вариант 2

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4 - 2x^2$ на

отрезке [0; 2].

2. Число 12 представьте в виде суммы двух положительных чисел так, чтобы сумма куба первого слагаемого и утроенного второго слагаемого была наименьшей.

Ответы к самостоятельной работе

Вариант 1. 1. 16 и –11. **2.** 15 = 10 + 5.

Вариант 2. 1. 8 и –1. **2.**12 = 1 + 11.

После проверки решений на крыльях доски учитель предлагает следующее задание.

З а д а н и е. Сравните значения выражений

$$\max_{[-7;3]}\left(x-\sqrt{7-2x}\right) \text{ и } \max_{[-1;2]}\left(x-\sqrt{7-2x}\right).$$

Р е ш е н и е. Сразу видно, что промежуток [–1; 2] полностью входит в промежуток [–7; 3] поэтому любое значение функции $y = x-\sqrt{7-2x}$ на первом промежутке содержится среди множества значений функции на втором промежутке. Поэтому наибольшее значение функции y на промежутке [–7; 3] не может быть меньше, чем на промежутке [–1; 2]. Это рассуждение позволяет поставить между выражениями знак "≥". Здесь следует еще убедиться в том, что наибольшие значения y на данных отрезках существуют. Для этого достаточно заметить, что все значения выражения, стоящего под знаком корня, положительны при $x \le 3$, откуда следует, что функция y определена и непрерывна на рассматриваемых отрезках.

Чтобы поставить между данными выражениями знак строгого неравенства нужно более внимательно рассмотреть функцию y. Она является суммой двух возрастающих функций $u = x$ и $v = -\sqrt{7-2x}$, значит, функция y возрастает. $\max\limits_{[-7;3]} y = y(3)$, $\max\limits_{[-1;2]} y = y(2)$ и $y(3) > y(2)$. Значит, $\max\limits_{[-7;3]}\left(x-\sqrt{7-2x}\right) > \max\limits_{[-1;2]}\left(x-\sqrt{7-2x}\right)$.

Домашнее задание. п. 10, № 147, 133 (7).

Цель четвертого урока: формирование умений школьников решать текстовые задачи на нахождение наибольших и наименьших значений.

Комментарии. Урок можно начать с проведения тестирования. Предлагается тест с выбором одного ответа из пяти предложенных вариантов.

Тест

1. Значение $f(x_0)$, где x_0 – меньшая из точек минимума функции $f(x) = \left(x^2-12x\right)^2+1$, равно:

А. 0; **Б.** 2; **В.** 1; **Г.** 3; **Д.** 0,5.

2. Если x_0 – точка максимума функции $f(x) = 1 - x\ln x$, то значение $f(x_0)$ равно:

А. $1-\frac{1}{e}$;   **Б.** б)$1+\frac{1}{e}$;   **В.** 2;   **Г.** г)$\frac{1}{e}-1$;   **Д.** e^2-1

3. Наибольшее значение функции $y=\frac{x}{3}-\sqrt[3]{x}$ на отрезке $\left[-1;\frac{1}{8}\right]$ равно:

А. $-\frac{4}{3}$;   **Б.** 0;   **В.** $\frac{2}{3}$;   **Г.** -1;   **Д.** $-\frac{5}{6}$

4. Наименьшее значение функции $y=\mathrm{ctg}x+x$ на отрезке $\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$ равно:

А. 1;   **Б.** 0;   **В.** –1;   **Г.** $1+\frac{\pi}{4}$;   **Д.** $\frac{3\pi}{4}-1$.

Ответы к тесту: 1. В. **2.** Б. **3.** В. **4.** Д.

После проверки теста разбирается пример 2 по учебнику, затем обсуждаются задачи № 140, 142, 152. Решение №140 аналогично примеру 2.

№ 140. Р е ш е н и е. Обозначая сторону вырезаемого квадрата x (см), а объем коробки V (см^3), получим: $V=x(64-2x)(40-2x)=4(x^3-52x^2+640x)$. $D(V)$ = (0; 20).

Найдем производную:

$V'=4(3x^2-104x+640)$; $V'=0$ при $x_1=8$, $x_2>20$ – не входит в $D(V)$.

Следует еще раз обратить внимание учеников на следующее рассуждение, облегчающее выяснение вида экстремума. Значение x = 8 меньше абсциссы вершины параболы $y=3x^2-104x+640$ и, следовательно, принадлежит промежутку убывания функции V'. Значит, V' в этой точке меняет знак «с плюса на минус», поэтому x = 8 – точка максимума функции V. По свойству единственной критической точки $\max V=V(8)$. О т в е т: 8 см.

№ 142. Р е ш е н и е. Пусть x дм – высота боковой стенки желоба, тогда площадь его поперечного сечения равна $x(4-2x)=4x-2x^2$.

Полезно задать вопрос: «Можно ли в этом задании обойтись без производной?» и получить, например, такой ответ: "Да, можно. Квадратный трехчлен $4x-2x^2$ принимает свое наибольшее значение при x = 1, значит, наибольшая площадь поперечного сечения желоба равна 2 дм^2". Ответ: 2 дм^2.

Подводя итог урока, следует подчеркнуть, что при решении задач на наибольшее или наименьшее значения функции полезно подумать, нельзя ли обойтись без производной.

Домашнее задание. п.10, № 139, 133 (8),

Цель пятого урока: формирование умений школьников решать текстовые задачи на поиск наибольших и наименьших значений.

Комментарии. Урок полезно начать с небольшой самостоятельной работы.

Самостоятельная работа

1. Какой из прямоугольников периметром 80 см имеет наибольшую площадь? Вычислите площадь этого прямоугольника.

2. Из всех прямоугольников с диагональю 4 дм найдите тот, у которого

площадь наибольшая.

Ответы к самостоятельной работе

1. Квадрат со стороной 20 см, 4 дм^2. **2.** Квадрат со стороной $2\sqrt{2}$ дм.

Проще решать вторую задачу без производной, используя выражение площади прямоугольника через диагональ и угол между диагоналями: $S = 0{,}5\ 4^2 sin\alpha$. Наибольшее значение площадь имеет, когда $\sin\alpha = 1$, т.е. $\alpha = 90°$. Значит, искомый прямоугольник квадрат.

После проверки самостоятельной работы продолжается решение текстовых задач на поиск наибольших и наименьших значений функции. Основное затруднение, которое обычно испытывают школьники, связано с введением функции, наибольшее или наименьшее значение которой нужно найти с указанием ее области определения. С другой стороны, само исследование функции, как правило, не вызывает у них затруднений. Поэтому на уроке основное внимание должно уделяться тому, как получить нужную функцию и найти ее область определения. А сам поиск наибольшего или наименьшего значения переносится в домашнюю работу школьников. Работа организуется фронтально. Ученики сначала читают по учебнику условие задачи, затем пару минут его обдумывают и начинают работать с учителем, который выполняет предложенные школьниками записи на доске. Записи в тетрадях школьники делают только после завершения работы на доске. При этом они могут задавать вопросы по решению.

№ 141. Р е ш е н и е. Пусть сторона основания параллелепипеда x, а его боковое ребро y, тогда его площадь основания равна $2x^2 + 4xy = S$. Отсюда $y = \dfrac{S - 2x^2}{4x}$. Запишем формулу объема параллелепипеда $V(x) = x^2y = \dfrac{Sx - 2x^3}{4}$. Область определения функции: $D(V) = (0; \sqrt{0{,}5S})$, поскольку $S - 2x^2 > 0$. Нужно найти значение x, при котором $V(x) = \max V(x)$. Завершить решение школьникам предлагается дома.

Найдем производную функции: $V'(x) = \dfrac{S - 6x^2}{4}$. Приравняем ее к нулю: $V'(x) = 0$ при $S - 6x^2 = 0$, $x = \pm\sqrt{\dfrac{S}{6}}$. На области определения $D(V)$ есть единственная критическая точка $x = \sqrt{\dfrac{S}{6}}$, в ней $V(x)$ принимает наибольшее значение: $y = \dfrac{S - \frac{S}{3}}{4\sqrt{\frac{S}{6}}} = \dfrac{\frac{S}{6}}{\sqrt{\frac{S}{6}}} = \sqrt{\dfrac{S}{6}}$. Размеры параллелепипеда $\sqrt{\dfrac{S}{6}}, \sqrt{\dfrac{S}{6}}, \sqrt{\dfrac{S}{6}}$, т.е. он является кубом с ребром $\sqrt{\dfrac{S}{6}}$. О т в е т: куб с ребром $\sqrt{\dfrac{S}{6}}$.

Домашнее задание. п. 10, №144, завершить решение задачи № 141.

Ввести функции в задачах № 145.

Цель шестого урока: формирование умений школьников решать задачи на нахождение наибольших и наименьших значений геометрических величин.

Комментарии. На уроке после проверки домашнего задания и ответов на вопросы школьников завершается изучение решения текстовых задач на наибольшие и наименьшие значения функции. Задачи № 149, 151 и 153 на этом уроке сначала обсуждаются фронтально по рисунку на доске, а затем решаются школьниками самостоятельно в тетрадях с последующей проверкой по решению на крыльях доски. В процессе самостоятельной работы с задачами школьники могут попросить помощи у учителя.

№ 149. Р е ш е н и е. Здесь важно правильно отметить угол x падения луча света (рис. 12). Затем записать, что освещенность y прямо пропорциональна косинусу угла падения x и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника, равному $(\frac{R}{\sin x})^2$:

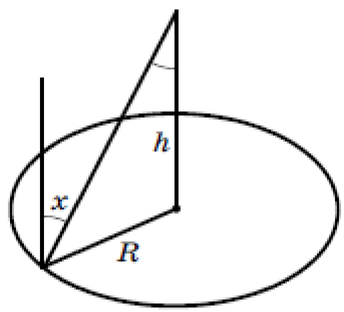


Рис. 12

$$y = \frac{k\cos x}{\left(\frac{R}{\sin x}\right)^2} = \frac{k}{R^2}\cdot\cos x\sin^2 x,$$ где $D(y) = (0; \frac{\pi}{2})$,

поскольку угол падения острый. Остается найти наибольшее значение y.

$$y' = \frac{k}{R^2}\cdot\left(\cos x\sin^2 x\right)' = \frac{k}{R^2}\cdot(-\sin^3 x + 2\sin x\cos^2 x).$$

$y' = 0$ при $\sin x(2\cos^2 x - \sin^2 x) = 0$, $\sin x(3\cos^2 x - 1) = 0$, $\sin x = 0$ или $\cos^2 x = \frac{1}{3}$.

Корни уравнения $\sin x = 0$ не входят в $D(y)$. Высота h равна $\frac{R}{\mathrm{tg} x}$.

$\mathrm{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\mathrm{tg}^2 x + 1 = 3$, $\mathrm{tg}^2 x = 2$, $\mathrm{tg} x = \sqrt{2}$, поскольку $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

$h = \frac{R}{\sqrt{2}}$. О т в е т: $h = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

№ 151. Р е ш е н и е. Пусть длина стороны участка, прилегающей к стене равна x, тогда длина стороны параллельной стене $a - 2x$. Площадь участка равна $S = x(a - 2x) = ax - 2x^2$. Область определения функции $D(S) = (0; 0{,}5a)$. Наибольшее значение квадратный трехчлен $ax - 2x^2$ принимает при $x = 0{,}25a$, значит, размеры участка наибольшей площади: $0{,}25a$ и $a - 2\cdot 0{,}25a = 0{,}5a$.

О т в е т: $0{,}25a$ и $0{,}5a$.

В завершение урока разбирается задача № 154.

№ 154. Р е ш е н и е. Выразим время t плавания через скорость v:

$t = \frac{s}{v}$ и подставим в данную в условии формулу стоимости С:

$C=(a+bv^3)\cdot\frac{s}{v}=\frac{s(a+bv^3)}{v}$. Найдем производную:

$$C'=\frac{3sbv^2\cdot v-s(a+bv^3)}{v^2}=\frac{3sbv^3-sa-sbv^3}{v^2}=\frac{2sbv^3-sa}{v^2}.$$

$$\frac{2sbv^3-sa}{v^2}=0,\ 2bv^3=a,\ v=\sqrt[3]{\frac{a}{2b}}.$$

Ответ: наиболее экономичная скорость $\sqrt[3]{\frac{a}{2b}}$.

Домашнее задание. п.10, 134, 135, 146 (для желающих).

11. Вторая производная (3 ч)

В данном пункте изучаются физический и геометрический смысл второй производной функции, а в качестве дополнительного материала дается представление о промежутках выпуклости, вогнутости и точках перегиба функции, о дифференциальном уравнении гармонических колебаний.

Предметные результаты обучения: определять выпуклость, вогнутость и точки перегиба функции по ее графику; проводить исследование функции с помощью второй производной на выпуклость, вогнутость и точки перегиба; использовать первую и вторую производные в исследовании функции

Метапредметные результаты обучения: строить график функции с применением пакетов компьютерных программ; решать задачи физического содержания на нахождение скорости и ускорения движения тела; считывать информацию с графиков функций и использовать в познавательной и социальной практике.

Цель первого урока: формирование понятий выпуклости, вогнутости, точки перегиба и второй производной.

Комментарии. Ниже мы приводим рекомендации, рассчитанные на рассмотрение дополнительного материала. Однако возможен и «экономный» вариант изучения темы, в котором не рассматривается дополнительный материал учебника, отмеченный треугольниками. Ученикам дается только определение и физический смысл второй производной. Закрепляется этот материал с помощью заданий №156, 163–170.

Основной акцент при изучении материала пункта делается на геометрическом смысле второй производной.

Устная работа

1. Назовите наибольшие и наименьшие значения функции $y = x^2 - 2x - 3$ на промежутке:

а) [–3; –1]; б) [–1; 2]; в) [1; 3]; г) [0; 3].

2. Найдите наибольшее или наименьшее значения функции, если они существуют:

а) $y = 2x^2 - 4x + 7$; в) $y=\frac{1}{7x^2-14x+1}$;

б) $y = 5x^2 + 10x - 6$; г) $y=\sqrt{4+2x-x^2}$.

В задании 2 (в) трехчлен в знаменателе имеет корни, при приближении к которым значения дроби стремятся в бесконечности, значит, функция не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений.

После завершения устной работы начинается изучение материала пункта 11. Начать можно с обсуждения рисунков 75 и 76 учебника на с.86. Прикладывая к графикам линейку и проводя ее вдоль графиков, как касательную к ним, ученики замечают, что на рисунке 75 кривая располагается над, а на рисунке 76 – под любой из касательных. Этот критерий и определяет название *вогнутая* или *выпуклая* кривая.

Рассматривая рисунок 77, ученики приходят к выводу о том, что графики функций могут на одних промежутках быть выпуклыми, а на других – вогнутыми. Точки, которые разделяют эти промежутки, называют *точками перегиба*.

Затем проводится фронтальная работа с графиками на рисунках 54, 56 (с.54) и 60 (с.55) учебника, в которой ученики называют промежутки выпуклости, вогнутости и точки перегиба.

После этой работы внимание учеников вновь обращается на рисунки 75 и 76 (с.86).

При движении вдоль вогнутой кривой линейка-касательная поворачивается против часовой стрелки, а при движении вдоль выпуклой кривой – по часовой стрелке.

В первом случае угол наклона касательной, а значит, и ее угловой коэффициент увеличивается, а во втором – уменьшается, т.е. производная функции в первом случае возрастает, а во втором – убывает.

В о п р о с: Как найти промежутки возрастания и убывания функции с помощью производной? [Находят производную функции и промежутки ее знакопостоянства.]

В случае определения выпуклости или вогнутости производную придется находить не от самой функции, а от ее производной.

По учебнику школьники читают определение второй производной.

Важно обратить внимание на то, что при изучении этого пункта будут рассматриваться функции, производные которых дифференцируемы, т.е. такие функции, которые имеют вторую производную. Выполняется № 156 (1).

Затем по рисунку 76 учебника школьники знакомятся с условием, достаточным для того, чтобы утверждать, что на данном промежутке функция является выпуклой или вогнутой. Формулируется понятие точки перегиба, и школьники устно выполняют № 157.

По учебнику рассматривается пример 1, затем школьникам предлагается самостоятельно выполнить № 158 (3), 156 (2).

Домашнее задание. п.11, № 158 (1, 2), 161 (1).

Цель второго урока: формирование знаний о физическом смысле второй производной.

Комментарии. Начинается урок с проведения теста по мотивам домашнего задания.

Тест

На доске построены графики функций (рис. 13–16). При ответе на вопросы, ученики записывают номер графика.

1. На каких рисунках изображены графики возрастающих функций?
2. На каких рисунках изображены графики убывающих функций?
3. Какая функция является выпуклой?
4. Какая функция является вогнутой?
5. Какая функция имеет точку перегиба?

Ответы к тесту: 1. 1), 4). **2.** 3). **3.** 3). **4.** 1). **5.** 4).

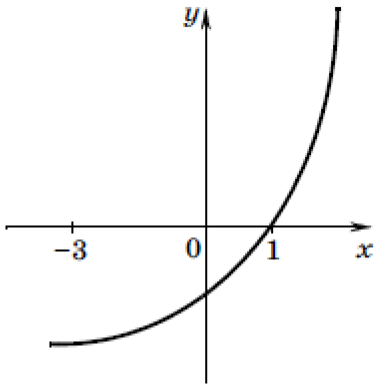


Рис. 13

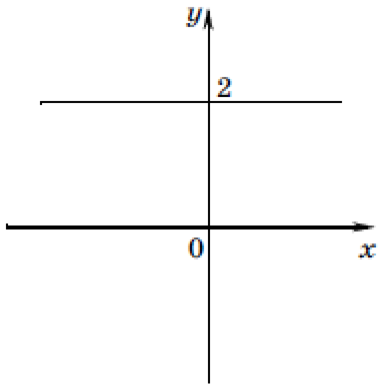


Рис. 14

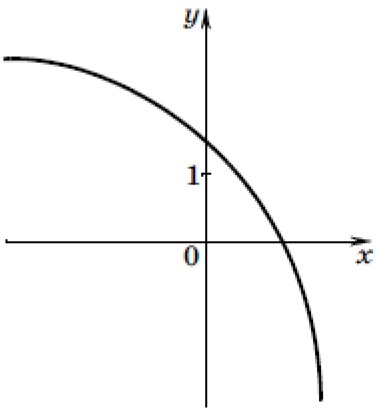


Рис. 15

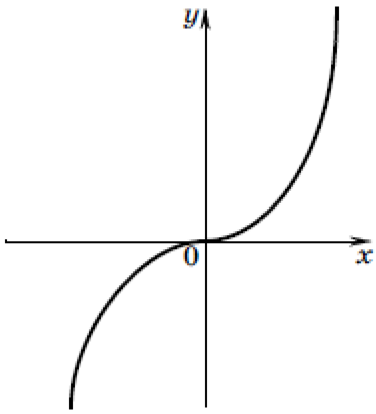


Рис. 16

З а д а н и е 1. В таблице показаны знаки первой и второй производных некоторой функции в точке x_0. Покажите схематически, как выглядит график функции в окрестности этой точки.

	1)	2)	3)	4)
y'	$y' > 0$	$y' > 0$	$y' < 0$	$y' < 0$
y''	$y'' > 0$	$y'' < 0$	$y'' > 0$	$y'' < 0$

Затем проверяется домашнее задание. Решение № 161 (1) полезно рассмотреть на доске.

№ 161 (1). Р е ш е н и е. Найдем производную функции y: $y' = 6x^2 - 6x - 12$ $y' = 0$ при $x = 4$ или $x = -3$. На промежутке L критических точек нет. $y' < 0$, значит, на промежутке [–2; 1] функция убывает и $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = f(-1) = 5$, а $\min\limits_{[-2;1]} f(x) = f(2) = -22$.

О т в е т: $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = f(-1) = 5$, а $\min\limits_{[-2;1]} f(x) = f(2) = -22$.

Затем в таблицу знаков первой и второй производной вносятся небольшие изменения и школьникам предлагается выполнить аналогичное задание.

З а д а н и е 2. В таблице приводится информация о значениях первой и второй производных некоторой функции в точке x_0. Покажите схематически, как выглядит график функции в окрестности этой точки.

	1)	2)	3)	4)
y'	$y'=0$	$y'=0$	$y'=0$	$y'=0$
y''	$y''>0$	$y''<0$	$y''>0$	$y''<0$

По результатам, полученным школьниками, формулируется достаточное условие максимума и минимума. После чего фронтально рассматривается № 161 (2).

№ 161 (2). Р е ш е н и е. Найдем производную функции y: $y' = -\dfrac{2}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2}$, $y' = 0$ при x = –3 и при x = 1. Промежутку L принадлежит только x = 1. Выяснить, максимум или минимум у функции в этой точке можно с помощью второй производной: $y'' = \dfrac{4}{(x+1)^3}$, $y''(1) > 0$ – значит, в этой точке минимум. Легко видеть, что на промежутке L он является наименьшим значением функции $\min\limits_{[0;2,5]} f(x) = f(1) = 1{,}5$. Для нахождения наибольшего значения функции придется вычислить ее значения на концах отрезка L:

$$y(0) = 2,\ y(2{,}5) = \frac{2}{3{,}5} + \frac{2{,}5}{2} = \frac{4}{7} + \frac{5}{4} = \frac{51}{28}.\ y(2{,}5) < y(0).$$

Примечание. Учителю следует отметить, что работа по выяснению поведения функции в критической точке оказалась излишней, так как проще было сразу найти значения функции в ней и на концах отрезка L.

Ответ: $\max\limits_{[0;2,5]} y = 2$, $\min\limits_{[0;2,5]} y = 1{,}5$.

После этого школьники знакомятся с физическим смыслом второй производной. Они вспоминают из курса физики, что такое "скорость изменения скорости", рассматривают по учебнику пример 2 и выполняют (с проверкой на крыльях доски) № 163 (1), 164.

Домашнее задание. п.11, № 160 (2),163 (2), 166.

Цель третьего урока: формирование представления о дифференциальном уравнении гармонического колебания.

Комментарии. При проверке домашнего задания класс фронтально обсуждает № 168, а один из учеников показывает решение № 160 (2) на доске. Полезно будет показать построенный в компьютерной программе график.

№ 160 (2). Р е ш е н и е.

Находим производную функции: $y' = 1 + \cos x$, $y' \geq 0$, значит, функция y возрастающая.

Находим вторую производную: $y'' = -\sin x$ $y'' = 0$ при $x = \pi n, n \in N$ – точки перегиба.

Строим график функции (рис. 17).

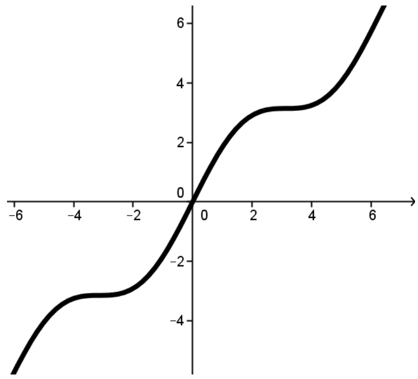


Рис. 17

Затем проводится самостоятельная работа по вариантам.

Самостоятельная работа

Вариант 1

Точка движется прямолинейно по закону $s(t) = -t^3 + 5t^2 + 4$ (м).
Найдите:
1) скорость в момент времени $t = 1$ с;
2) ускорение в момент времени $t = 1$ с;
3) максимальную скорость движения этой точки.
4) момент времени, в который скорость точки окажется равной нулю.

Вариант 2

Точка движется прямолинейно по закону $s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 - 4$ (м).

Найдите:
1) скорость в момент времени $t = 3$ с;
2) ускорение в момент времени $t = 1$ с;
3) максимальную скорость движения этой точки;
4) момент времени, в который скорость точки окажется равной нулю.

Ответы к самостоятельной работе

Вариант 1. 1) 7 м/с; **2)** 4 м/с^2; **3)** $8\frac{1}{3}$ м/с; **4)** $3\frac{1}{3}$ с.

Вариант 2. 1) 3 м/с; **2)** 2 м/с^2; **3)** 4 м/с; **4)** 4 с.

После проверки самостоятельной работы школьники выполняют № 167, 170 (1). Проверка каждого задания осуществляется на крыльях доски.

По учебнику разбирается процесс получения дифференциального уравнения колебания груза, который изображен на рисунке 78 (с. 88).

Завершается урок построением на доске графика в № 175 (2). Отдельные ответы ученики дают устно, а часть выкладок выполняет на доске учитель с опорой на предложения школьников. Главное, чтобы школьники понимали цель каждого шага решения.

№ 175 (2). Р е ш е н и е. Разложим знаменатель дроби на множители: $y = \dfrac{1}{x^2 - x - 2} = \dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$. Найдем асимптоты: вертикальные асимптоты $x = -1$ и $x = 2$, горизонтальная асимптота $y = 0$.

Найдем производную функции и приравняем ее к нулю:

$y' = -\dfrac{2x-1}{(x^2-x-2)^2}$, $y' = 0$ при $x = 0{,}5$.

Найдем вторую производную функции и точки перегиба:

$$y'' = -\frac{2(x^2-x-2)^2 - 2(2x-1)^2(x^2-x-2)}{(x^2-x-2)^4} = -\frac{2(x^2-x-2-(2x-1)^2)}{(x^2-x-2)^3} =$$

$$= -\frac{2(-3x^2+3x-3)}{(x^2-x-2)^3} = \frac{6(x^2-x+1)}{(x^2-x-2)^3},$$ $y'' > 0$ при $x < -1$ и при $x > 2$ – график выпуклый, $y'' < 0$ при $-1 < x < 2$ – график вогнутый. В точке $x = 0{,}5$ вторая производная отрицательна, значит, функция имеет максимум. Он равен $\dfrac{4}{9}$.

На доске изображается схематический график, а затем школьникам демонстрируется через проектор график, построенный в компьютерной программе (рис. 18).

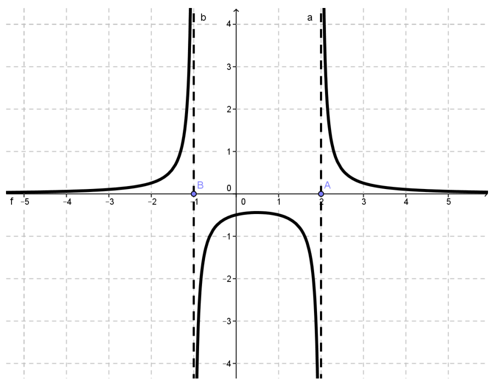


Рис. 18

Домашнее задание. п.11, № 168, 170 (2), 175 (1).

Зачет по теме «Техника дифференцирования»

Инструкция к проведению зачета

Зачет проводится по двум вариантам заданий, которые могут быть записаны на доске или на карточках. Ученики, первыми выполнившие все задания, подходят с работой к учителю. Учитель проверяет работу и задает по ходу проверки теоретические вопросы. Ученики, которые правильно решили все задания и ответили на вопросы учителя, считаются сдавшими зачет и становятся консультантами, которым выдается таблица и список устных вопросов и заданий. Из списка вопросов и заданий помощник задаст один вопрос и оценит ответ на него, также как и все задания знаком "+", если ответ или решение верно или знаком "–", если задание не выполнено или выполнено неверно. Остальные ученики могут сдать зачет учителю или консультанту. Учитель просматривает таблицы у консультантов, видит общую картину сдачи зачета, оказывает индивидуальную помощь ученикам.

№	Фамилия И.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.										
2.										

Напомним, что ученики, которым не удалось на этом уроке сдать зачет (т.е. ответить на удовлетворительную оценку) будут сдавать зачет учителю на следующих уроках, переменах или после уроков.

Задания первого и второго варианта предлагаются относительно слабым ученикам, а третьего и четвертого – более сильным.

Задания для письменной части зачета

Вариант 1

1. По графику производной $y = h'(x)$ функции $y = h(x)$, изображенному на рисунке 19, укажите точки минимума и максимума функции $y = h(x)$ на промежутке $(a; b)$.

2. На рисунке 20 изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.

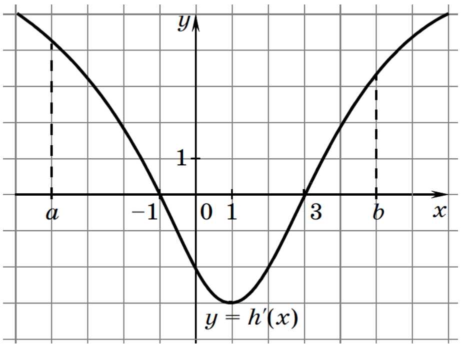


Рис. 19

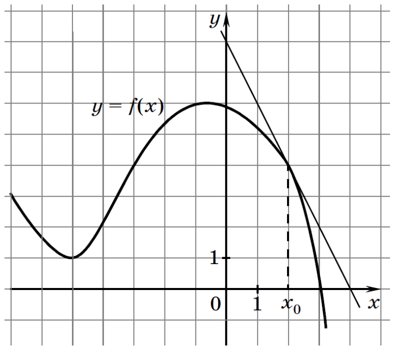


Рис. 20

3. Найдите значение производной функции $p(x) = x^2 + \sin x$ в точке $x_0 = \pi$.

4. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = \cos 2x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

5. Проведите исследование и постройте график функции $y = -x^3 + 3x + 5$.

Вариант 2

1. По графику производной $y = g'(x)$, изображенному на рисунке 21, укажите точки минимума и максимума функции $y = g(x)$ на промежутке $(a; b)$.

2. На рисунке 22 изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.

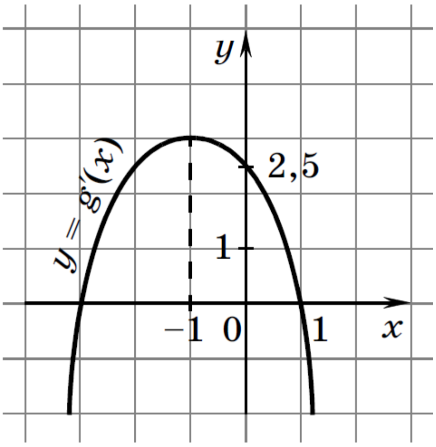


Рис. 21

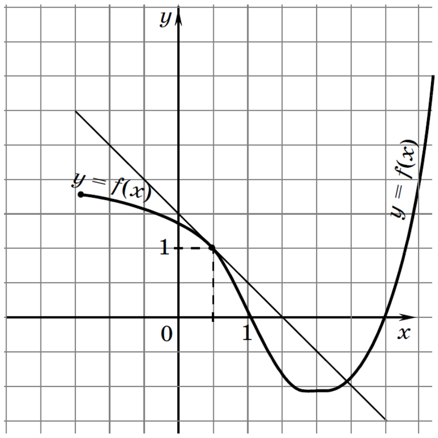


Рис. 22

3. Найдите значение производной функции $q(x) = \ln x - 2\cos x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

4. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=\sin 3x$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$

5. Проведите исследование и постройте график функции $y = 2x^3 - 6x + 4$.

Вариант 3

1. Составьте уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 6x + 8$ в точке $x = 5$.

2. Определите промежутки возрастания и убывания функции $y = \dfrac{2x}{e^x}$.

3. Найдите наибольшее значение функции $g(x) = \log_{0,5}\left(x^2 - 9\right)$ на промежутке [5; 7].

4. При каком значении аргумента равны скорости изменения функций $f(x) = \cos 2x$ и $g(x) = \sin x$?

5. Проведите исследование и постройте график функции $y = \dfrac{x}{x+1}$.

Вариант 4

1. Составьте уравнение касательной к параболе $y = x^2 + 2x - 3$ в точке $x = 3$.

2. Определите промежутки возрастания и убывания функции $y = 2xe^x$.

3. Найдите наименьшее значение функции $g(x) = 2^{2x-1}$ на промежутке [–3; 1].

4. При каком значении аргумента равны скорости изменения функций $f(x) = \sqrt{3x-10}$ и $g(x) = \sqrt{14+6x}$?

5. Проведите исследование и постройте график функции $y = \frac{1-2x}{x+1}$.

Ответы к зачету

Вариант 1. 1. $x = -1$ – точка максимума, $x = 3$ – точка минимума.

2. $f'(x_0) = -2$.**3.** $p'(\pi) = 2\pi - 1$. **4.** $y = -\sqrt{3}(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2}$.

Вариант 2. 1. $x = -3$ – точка минимума, $x = 1$ – точка максимума.

2. $f'(x_0) = -1$. **3.** $q'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi} + 2$. **4.** $y = -3x + \pi$.

Вариант 3. 1. $y = 4x - 17$. **2.** Функция возрастает на $(-\infty;\ 1]$, убывает на $[1;\ +\infty)$. **3.** $g(x) = -4$. **4.** $x = \frac{\pi}{2}n, n \in N$ или $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in N$.

Вариант 4. 1. $y = 8x - 12$. **2.** Функция убывает на $(-\infty;-1]$**,** возрастает на $[-1;+\infty)$. **3.** $g(x) = \frac{1}{128}$. **4.** $x = 9$.

Вопросы к зачету

1. Может ли вторая производная четной функции обращаться в нуль в точке нуль? [Может, например $y=x^4$.]

2. Могут ли и первая, и вторая производные менять знак с «плюса» на «минус» в одной и той же точке? [Нет. Если знак меняет первая производная, то в точке максимум, и вторая производная должна быть отрицательной]

3. Верно ли, что приращение произведения двух функций равно произведению их приращений? [Нет.]

4. Возрастающей или убывающей является сложная функция, если и внешняя, и внутренняя функции возрастают? [Возрастающей.]

5. Возрастающей или убывающей является сложная функция, если и внешняя, и внутренняя функции убывают? [Возрастающей.]

6. Возрастающей или убывающей является сложная функция, если внешняя функция возрастает, а внутренняя функция убывает? [Убывающей.]

7. Возрастающей или убывающей является сложная функция, если внешняя функция убывает, а внутренняя функция возрастает? [Убывающей.]

8. Из каких функций составлена сложная функция $y = e^{\sqrt{\lg x}}$? [$y = \lg x,\ v = \sqrt{x},\ z = e^{\sqrt{v}}$.]

9. Запишите производные суммы, произведения и частного двух функций.

10. Запишите формулы производных степенной функции, тригонометрических функций, показательной и логарифмической функций.

11. Каков физический смысл первой и второй производных функции? [Скорость и ускорение.]

12. Каков геометрический смысл первой и второй производных? [Угловой коэффициент касательной; выпуклость.]

13. Приведите пример сложной функции. Найдите производную данной

функции.

14. Опишите алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке.

15. В чем различие между понятиями максимума и наибольшего значения функции, минимума и наименьшего значения функции?

16. Приведите пример функции, наибольшее значение которой можно найти без помощи производной.

17. Как связаны критические точки с первой производной?

18. Как связаны точки экстремума со знаком второй производной?

Контрольная работа № 4
Тема «Техника дифференцирования»

Вариант 1

I *уровень*

В заданиях 1–4 укажите ответ, который вы считаете верным.

1. Тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y=-\frac{4}{x}$ в его точке с абсциссой x_0=–2 равен:

А. 0; **Б.** 2; **В.** 1; **Г.** –1.

2. Производная функции $y=e^{2x}-\ln 2$ в точке x_0=ln3 равна:

А. 17,5; **Б.** 18; **В.** 9; **Г.** 6.

3. Точка максимума функции $f(x)=x^3-3x^2$ равна:

А. 2; **Б.** –2; **В.** $\frac{1}{3}$; **Г.** 0.

II *уровень*

4. Найдите абсциссу точки графика функции $y = x^2$, в которой касательная к нему параллельна прямой $y = 2x - 5$?

5. Найдите наибольшее значение функции $g(x)=\log_{0,5}\left(x^2-9\right)$ на промежутке [5; 7].

III *уровень*

6. Найдите наибольшее из целых значений m, при которых функция $f(x)=-x^3+mx^2-5x+2$ убывает на всей числовой прямой?

Вариант 2

1. Тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции $y=-\frac{4}{x^2}$ в его точке с абсциссой x_0=–2 равен:

А. 1; **Б.** 2; **В.** 0; **Г.** –1.

2. Производная функции $y=\ln(2x+3)+\ln 5$ в точке x_0=2 равна:

А. $\frac{1}{7}$; **Б.** $\frac{2}{7}+\ln 5$; **В.** $\frac{2}{7}$**;** **Г.** $\frac{12}{35}$.

3. Точка минимума функции $y=3x-x^3$ равна:

А. 0; **Б.** –1; **В.** 1; **Г.** 3.

II *уровень*

4. Найдите абсциссу точки графика функции $y = x^2 + 1$, в которой касательная к нему параллельна прямой $y = 4x + 3$.

5. Найдите наименьшее значение функции $g(x) = 2^{1-2x}$ на промежутке $[-3; 1]$.

III *уровень*

6. Найдите наименьшее из целых значений n, при которых функция $y = e^{2x} \cdot x^2 + ne^{2x} + 3$ возрастает на всей числовой прямой.

Ответы к контрольной работе

Вариант 1. 1. В. **2.** Б. **3.** Г. **4.** $x = 1$. **5.** $g(x) = -4$. **6.** Решение. Функция убывает на всей числовой прямой, если ее производная всюду, кроме отдельных точек, отрицательна. $f'(x) = -3x^2 + 2mx - 5 \le 0$. Квадратный трехчлен $-3x^2 + 2mx - 5$ не должен иметь более одного корня, значит, его дискриминант отрицателен или равен нулю. $m^2 - 15 \le 0$, $m^2 \le 15$. Наибольшее целое значение m равно 3.

Вариант 2. 1. Г. **2.** В. **3.** Б. **4.** $x = 2$. **5.** $g(-3) = 0{,}5$. **6.** Решение. Функция возрастает на всей числовой прямой, если ее производная всюду, кроме отдельных точек, положительна.

$$y' = \left(e^{2x} \cdot x^2 + ne^{2x} + 3\right)' = 2e^{2x} \cdot x^2 + 2xe^{2x} + 2ne^{2x} = 2e^{2x}\left(x^2 + x + n\right)$$

Поскольку $2e^{2x} > 0$, должно быть, $x^2 + x + n \ge 0$. Неравенство выполняется, если дискриминант уравнения отрицателен или равен нулю.

$D = 1 - 4n \le 0$, $4n \ge 1$, $n \ge \frac{1}{4}$. Наименьшее целое значение $n = 1$.

ГЛАВА 4
ИНТЕГРАЛ И ПЕРВОООБРАЗНАЯ

В четвертой главе изучаются элементы еще одного раздела математического анализа – интегрирования. Вводятся понятия криволинейной трапеции, интеграла, первообразной, изучается таблица первообразных основных элементарных функций. В построении этой главы используется принцип разделения трудностей. В пункте 12 вводится понятие интеграла, и школьники учатся записывать с его помощью площадь криволинейной трапеции, объем тела вращения, объем многогранника, а в пункте 13 учатся вычислять эти интегралы с помощью таблицы первообразных элементарных функций. Первый пункт этой главы посвящен формированию творческой составляющей применения интегралов, а второй пункт – технической.

12. Площадь криволинейной трапеции (3 ч)

В данном пункте изучается криволинейная трапеция, интегральная сумма, интеграл, площадь криволинейной трапеции, формула Ньютона-Лейбница, формула объема тела вращения, геометрический и механический смысл интеграла. В заданиях пункта ученики будут заниматься творческой деятельностью, записывать площади и объемы фигур с помощью интегралов.

Предметные результаты обучения: формулировать определения криволинейной трапеции, интеграла, интегрирования; изображать фигуру, площадь которой записана с помощью интеграла; записывать площадь изображенной криволинейной трапеции с помощью интеграла или суммы и разности интегралов; записывать объем тела с помощью интеграла; строить фигуру, ограниченную данными линиями в тетради.

Метапредметные результаты обучения: применять пакеты компьютерных программ для построения графиков функций; подводить объект под понятие; переводить с графического языка на язык математических формул и обратно; применять аппарат математического анализа для вывода формул площади и объема фигур, известных из курса геометрии.

Цель первого урока: формирование понятий криволинейной трапеции и интеграла.

Комментарии. Изучение материала можно начать с беседы об измерении площадей фигур. Школьники называют фигуры, площади которых они умеют находить – это квадрат, прямоугольник, треугольник, параллелограмм, ромб, трапеция, круг. Для площадей этих фигур известны формулы. Желательно, чтобы учащиеся указывали формулы вместе с названием фигур. Кроме того, любой многоугольник можно разрезать на треугольники, найти их площади и сложить.

Площадь фигур, ограниченных кривыми линиями, можно найти приближенно с помощью палетки. В этой главе учебника школьники познакомятся с еще одним способом вычисления площадей фигур.

Ученики рассматривают рисунок 80 в учебнике на с. 93 и знакомятся с термином и определением *криволинейной трапеции*. Полезно перечислить линии, ограничивающие трапецию: 1) ось абсцисс; 2) две прямые $x = a$ и $x = b$; 3) график функции, которая на промежутке $[a; b]$ непрерывна и неотрицательна.

Подведению по понятие криволинейной трапеции, распознавание криволинейной трапеции посвящен № 176, который разбирается фронтально. Для каждой фигуры следует проверить, являются ли линии, которыми она ограничена, теми, которые упомянуты в определении. Если же фигура не является криволинейной трапецией, то необходимо указать, какое из условий определения не выполнено, и что надо сделать с фигурой, чтобы она стала криволинейной трапецией.

После того, как учащиеся познакомились с понятием криволинейной трапеции, рассматривается вопрос о нахождении ее площади. Обсуждение проводится с опорой на рисунки 81–83 на с.94 и заканчивается введением обозначения интеграла.

Школьникам предлагается самостоятельно записать с помощью обозначения интеграла площади фигур № 179 (а, б, в) и изобразить криволинейную трапецию № 180 (2, 3). Для проверки используются решения, которые выполнялись на боковых крыльях доски.

Затем фронтально обсуждается вопрос о том, является ли фигура из № 179 (г) криволинейной трапецией, и, как найти площадь этой фигуры. После того, как школьники предложат найти разность площадей двух криволинейных трапеций, их внимание привлекается к № 178. В обсуждении этого задания активную роль играет учитель, который копирует рисунок 89 на доску или проектирует на экран, разбивает фигуру на прямоугольники и записывает ее площадь как интегральную сумму:

$$S \approx \Delta x \cdot (f(a) - g(a)) + \Delta x \cdot (f(x_1) - g(x_1)) + \Delta x \cdot (f(x_1) - g(x_1)) + \ldots +$$
$$+ \Delta x \cdot (f(x_{n-1}) - g(x_{n-1})).$$

Затем переходит к пределу и выражает площадь фигуры через интеграл:

$$S= \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x(f(a) - g(a)) + \ldots + \Delta x(f(x_{n-1}) - g(x_{n-1})) = \int_a^b (f(x) - g(x))dx.$$

Полезно вернуться к № 179 (г) и записать ответ: $S = \int_1^4 (5x - 4 - x^2)dx$.

В завершение урока рассматривается № 182 (в, г). В № 182 (в) не указаны пределы интегрирования a и b. Школьники должны сами сообразить, что нужно найти абсциссы точек пересечения данных кривых, для чего решить уравнение:

$4 - x^2 = x^2 - 2x$, $x^2 - x - 2 = 0$, $x_1 = a = -1$, $x_2 = b = 2$.

Домашнее задание. п.12, № 180 (1, 4), 182 (а, б).

Цель второго урока: формирование умения учащихся записывать площадь криволинейной трапеции в виде суммы и разности интегралов, использовать идею симметрии при нахождении площадей.

Комментарии. После проверки домашнего задания школьники самостоятельно выполняют № 181, а затем объясняют, как были получены формулы для вычисления площадей фигур.

Дополнительно классу предлагается ответить на следующий в о п р о с: "В каких случаях площадь фигуры, ограниченной линиями *y = f(x) и y=g(x),* можно найти, как интеграл разности этих функций $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$?". [Точка a – левая, а точка b – правая общая точка графиков данных функций, и, кроме того, для любого x из отрезка $[a; b]$ выполняется неравенство $f(x) \geq g(x)$.]

Затем фронтально обсуждается № 183 (1). Начинается решение с изображения фигуры. Построение выполняет на доске учитель по описанию фигуры, которое дают школьники.

В о п р о с ы д л я о б с у ж д е н и я

1. Является ли данная фигура криволинейной трапецией? [Нет, кривая, которая ограничивает фигуру, расположена в нижней полуплоскости, и значения соответствующей функции отрицательны.]

2. Можно ли заменить эту фигуру равновеликой ей криволинейной трапецией? [Да, например, с помощью симметрии относительно оси абсцисс.]

3. Какими линиями будет ограничена эта криволинейная трапеция? [По сравнению с данной фигурой изменения коснутся только параболы. Парабола, симметричная данной, задается уравнением $y = 1 - x^2$.]

4. Каковы пределы интегрирования? [Пределы интегрирования –1 и 1.]

5. Чему равна площадь фигуры? [$S = \int_{-1}^{1}(1-x^2)dx$.]

6. Можно ли рассматривать исходную фигуру, как фигуру, ограниченную сверху и снизу двумя линиями $f(x)$ и $g(x)$? [Да, сверху она ограничена линией $y = 0$, а снизу линией $y = x^2 - 1$.]

7. Как можно записать площадь этой фигуры?

[$\int_{-1}^{1}(0-(x^2-1)dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2)dx$.]

Полезно рассмотреть также возможность использования симметричности фигуры относительно оси ординат. Эта симметричность позволяет получить площадь всей фигуры как удвоенную площадь ее части, расположенной, например, в правой полуплоскости.

Например, $S = 2\int_{0}^{1}(1-x^2)dx$.

Аналогичным образом проводится работа с № 183 (3). После этого по учебнику рассматривается пример 2 и полученная формула объема тела вращения применяется в № 184 (а).

Домашнее задание. п.12, № 183 (4).

Цель третьего урока: формирование умения обучающихся записывать объем тела вращения с помощью интеграла.

Комментарии. В начале урока школьникам предлагается самостоятельная работа.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Запишите площадь заштрихованной фигуры (рис. 23) с помощью интеграла.

2. Изобразите фигуру, площадь которой равна $\int_{-\pi}^{0}2\sin x dx$.

Вариант 2

1. Запишите площадь заштрихованной фигуры (рис. 24) с помощью интеграла.

2. Изобразите фигуру, площадь которой равна $\int\limits_{-\pi}^{0} 0{,}5\cos x dx$.

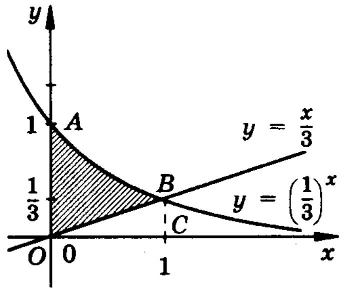


Рис. 23

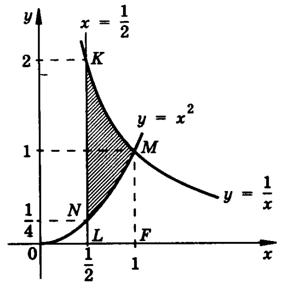


Рис. 24

Ответы к самостоятельной работе

Вариант 1. 1. $\int\limits_{0}^{1}(\frac{1}{3^x}-\frac{x}{3})dx$. **Вариант 2.** 1. $\int\limits_{0,5}^{1}(\frac{1}{x}-x^2)dx$.

Затем фронтально выполняется № 184 (б). Учащиеся должны понять, что искомый объем равен разности объемов двух тел вращения. Записи на доске делает учитель. Составляется соответствующая интегральная сумма:

$$V = V_1 - V = \pi\int\limits_{0}^{4} x^2 dx - \pi\int\limits_{0}^{4}\frac{x^4}{64}dx.$$

В завершение урока школьникам предлагается задание.

З а д а н и е. Выразите через интеграл объем конуса с радиусом r и высотой h.

Р е ш е н и е. Единственная проблема – записать функцию, ограничивающую сверху прямоугольный треугольник: $y = kx$, где $k = \frac{r}{h}$. Таким образом, будет получено выражение для объема $V = \pi\int\limits_{0}^{h}(kx)^2 dx$, которое будет выглядеть так: $\pi\int\limits_{0}^{h}\left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx$. *Ответ*: $\pi\int\limits_{0}^{h}\left(\frac{rx}{h}\right)^2 dx$.

Домашнее задание. п.12, № 183 (2), Найти площадь и объем тела образованного вращением фигуры № 182 (б) вокруг оси абсцисс.

13. Первообразная (7 ч)

В этом пункте вводятся понятия первообразной и интегрирования, изучаются правила нахождения первообразных и таблица первообразных основных элементарных функций. Если в предыдущем пункте школьники учились записывать площади криволинейных трапеций и объемы тел вращения с помощью интеграла, то в этом пункте они научатся их вычислять.

Предметные результаты обучения: формулировать определение первообразной функции; проверять является ли одна функция первообразной для другой; по графику первообразной строить саму функцию; формулировать и доказывать простейшие правила нахождения первообразной функции; пользоваться таблицей первообразных основных функций при решении задач; находить в простейших случаях все первообразные функции; применять интегралы для нахождения площади криволинейной трапеции, объема тела вращения; решать с помощью интегралов задачи практического, геометрического и физического содержания приведенных в учебнике видов.

Метапредметные результаты обучения: пользоваться таблицами, компьютерными программами для учебных целей.

Цель первого урока: формирование понятия первообразной и правила нахождения первообразных.

Комментарии. В начале урока по учебнику рассматриваются рисунки 94, 95 на с.100 и вводится понятие *первообразной*. После того, как ученики поняли, что функция, график которой ограничивает криволинейную трапецию сверху, является производной ее площади, следует сразу обратить их внимание на возможность вычисления площади трапеции, как разности значений функции $S(x)$, т.е. $S(b) - S(a)$. Поскольку производная $f(x)$ функции $S(x)$ задана, нужно научиться находить функции по их производным.

После этого школьники читают определение *первообра́зной функции*. При знакомстве с определением первообразной необходимо подчеркнуть, что первообразная рассматривается на промежутке, т.е., что областью определения первообразной является промежуток, а, не объединение непересекающихся промежутков.

По учебнику разбирается пример 1 по предложенным ниже вопросам.

В о п р о с 1. Как проверить, что одна из двух данных функций является первообразной для другой? [По определению, чтобы первая функция была первообразной второй функции, вторая функция должна быть производной первой. Кроме того, область определения первой функции должна быть промежутком.]

После того, как эти два требования сформулированы, учащиеся начинают фронтальную работу с № 185.

В о п р о с 2. С чего лучше начинать: с нахождения производной или с проверки области определения? [Проще найти область определения функции. Область определения функции $F(x)$ представляет собой промежуток в заданиях 1, 3 и 5.]

Заметим, что в задании 3 число 0 входит в $D(F)$, но не входит в $D(f)$. В этом и других заданиях номера ученикам предлагается указать некоторый промежуток, входящий в обе области определения и ответить на вопрос задания для этого промежутка. Для этого следует найти производную функции F'. Эту часть работы ученики выполняют самостоятельно с проверкой каждого задания на крыльях доски.

Продолжая работу с учебником, школьники узнают, что, во-первых, любая постоянная функция, т.е. функция вида $F(x) = C$, где C – число, является первообразной функции $f(x) = 0$. Таким образом, у функции $f(x) = 0$

имеется бесконечно много разных первообразных. Во-вторых, если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то $F(x) + C$ тоже ее первообразная, и любые две первообразные одной и той же функции отличаются друг от друга на число, т.е. имеют одну и ту же разность при любом значении аргумента.

Отсюда вытекает важное практическое следствие. Для вычисления площади фигуры можно брать любую из первообразных, а не только $S(x)$. Соответствующие выкладки школьники находят в учебнике.

Вопрос 3. Почему $S(b) - S(a) = S(b)$?

Для ответа на этот вопрос снова рассматривается рисунок 94. На нем видно, что при $x = a$ криволинейная трапеция "вырождается" в отрезок. Отрезок не имеет площади, поэтому его площадь считают равной нулю.

Затем по учебнику разбирается пример 2, после чего учитель на доске выписывает формулу производной $(\cos x)' = -\sin x$ и показывает, как из правой части равенства убрать минус.

Затем выстраивается диалог с классом по следующим вопросам.

1. Как добавить в правую часть число, если нужно получить в ней, например, $2\sin x$? [Умножить обе части на –2:

$(\cos x)' = -\sin x$, $(-2)\cdot(\cos x)' = 2\sin x$, $(-2\cos x)' = 2\sin x$.]

2. А если нужно получить первообразную для $3\cos x$? [Тогда нужно взять другую формулу $(\sin x)' = \cos x$, умножить обе части на 3 и внести тройку под знак производной: $3(\sin x)' = 3\cos x$, $(3\sin x)' = 3\cos x$.]

3. Производную какой функции надо находить, чтобы получить $\cos x - \sin x$? [$\cos x - \sin x = (\sin x)' + (\cos x)' = (\sin x + \cos x)'$.]

Заменим теперь в формуле $(\sin x)' = \cos x$ аргумент x на $kx + b$, где k и b какие-нибудь числа, причем $k \neq 0$. $(\sin(kx + b))' = k\cos(kx + b)$. Отсюда получим $\left(\frac{1}{k}\sin(kx + b)\right)' = \cos(kx + b)$.

Эта работа проводится фронтально, а записи на доске делает учитель. На основании рассмотренных примеров даются словесные формулировки первым двум правилам нахождения первообразных, и еще раз говорится о том, как их получить.

Если $F(x)$ первообразная для функции $f(x)$, то $kF(x)$ первообразная для функции $kf(x)$.

При доказательстве правила умножим равенство $F'(x) = f(x)$ на k, получим $kF'(x) = kf(x)$ и внесем числовой коэффициент под знак производной $(kF(x))' = kf(x)$.

Первообразная суммы функций равна сумме их первообразных.

Пусть F и G первообразные соответственно для функций f и g, тогда $F' = f$ и $G' = g$. По правилу дифференцирования суммы получим:

$(F \pm G)' = F' \pm G' = f \pm g$.

Правило нахождения первообразной сложной функции $f(kx + b)$ не формулируется, а просто записывается в таблицу.

Затем ученики в своих тетрадях записывают таблицу правил нахождения первообразных.

Функция	$f(x)$	$g(x)$	$kf(x)$	$f(x) \pm g(x)$	$f(kx + b)$
Первообразная	$F(x)$	$G(x)$	$kF(x)$	$F(x) \pm G(x)$	$\frac{1}{k}F(kx+b)$

В завершение урока подводится его краткий итог.

Домашнее задание. п.13 (определение первообразной), № 185 (4) с указанием промежутка, на котором рассматривается первообразная, № 186 (1), 189 (1, 4) найти какую-нибудь первообразную без учета точки A.

Цель второго урока: формирование умения школьников применять формулу Ньютона-Лейбница.

Комментарии. Начинается урок с устной работы.

Устная работа

Используя таблицу первообразных, определите, является ли функция $F(x)$ первообразной для функции $f(x)$:

1) $F(x) = \sqrt{3}$, $f(x) = 0$;
2) $F(x) = x$, $f(x) = 1$;
3) $F(x) = \frac{x}{2}$, $f(x) = 1$;
4) $F(x) = x^2$, $f(x) = 2x$;
5) $F(x) = 5x^5$, $f(x) = x^4$;
6) $F(x) = 2x^2 - 3x + 9$, $f(x) = 4x - 3$;
7) $F(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$;
8) $F(x) = \cos x$, $f(x) = \sin x$;
9) $F(x) = \ln 4x$, $f(x) = \frac{4}{x}$;
10) $F(x) = \frac{7^x}{\ln 7}$, $f(x) = 7^x$.

Проверяется домашнее задание, в ходе обсуждения которого ученики повторяют определение первообразной. Затем завершается выполнение заданий № 189 (1, 4). Сначала школьники убеждаются, что найденные ими первообразные не проходят через указанные точки, а затем подбирают число C, которое нужно прибавить к их первообразным. Так, в № 189 (1) школьниками будет найдена первообразная $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x$, $F(\frac{\pi}{4}) = 0$.

№189 (1). Р е ш е н и е. Теперь ищем первообразную из условия, что $G(\frac{\pi}{4}) + C = 2$, $0 + C = 2$, $C = 2$. Значит, искомая первообразная $G(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + 2$. *Ответ*: $G(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + 2$.

№ 189 (4). Р е ш е н и е. $G(x) = F(x) + C = -\cos x - \sin x + C$, $-\cos\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{2} + C = 1$, $0 - 1 + C = 1$, $C = 2$. *Ответ*: $G(x) = -\cos x - \sin x + 2$.

Затем внимание школьников привлекается к таблице первообразных в учебнике. С помощью этой таблицы выполняются задания № 189 (2, 5, 6). Сначала находится общий вид первообразных для каждой функции, при этом школьники указывают, в какой строчке таблицы первообразных стоит нужное выражение и, какое правило нахождения первообразных следует применить. Затем первообразная записывается школьниками в тетради. При этом одному из них предлагается выполнить задание на крыле доски. Каждое задание обсуждается с классом.

В № 189 (5) еще на этапе устной работы учащимся придется выбрать в таблице нужное выражение. Поскольку абсцисса точки *A* отрицательна, то первообразной от $-\frac{3}{x}$ будет – 3ln(–*x*). В № 189 (6) промежуток, на котором ищется первообразная, ограничен соседними нулями sin3*x*: $0 < \frac{\pi}{12} < \frac{\pi}{3}$. Когда будет получен ответ $F(x) = -\frac{1}{3}\text{ctg}3x - \frac{2}{3}$, следует напомнить школьникам, что необходимо дополнительно указать промежуток, на котором определена эта первообразная $F(x) = -\frac{1}{3}\text{ctg}3x - \frac{2}{3}$, где $0 < x < \frac{\pi}{3}$.

Затем внимание школьников снова обращается на рисунок 94 на с.100 и на доске записывается формула Ньютона-Лейбница для вычисления интеграла, как *приращения любой из первообразных подинтегральной функции*: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$.

Поскольку для вычисления интеграла нужно найти первообразную, то и сам процесс нахождения первообразных называют *интегрированием*.

Применяя формулу Ньютона-Лейбница к задаче, рассмотренной в примере 2, получаем: $S = \int\limits_0^\pi \sin x dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -\cos\pi - (-\cos 0) = 1 + 1 = 2.$

В завершение урока учитель предлагает найти интегралы в № 190 (1, 3, 5). При выполнении № 190 (3) у школьников могут возникнуть затруднения, поскольку в таблице первообразных нет корней. Учитель может им помочь, напомнив, что для $x > 0$ корни можно заменять степенями с рациональными показателями: $\int\limits_3^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int\limits_3^{27} x^{-\frac{2}{3}}dx = 3x^{\frac{1}{3}}\Big|_3^{27} = 3\sqrt[3]{x}\Big|_3^{27} = 3\cdot\left(\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{3}\right) = 9 - 3\sqrt[3]{3}.$

Подводя итог урока, учитель отметит, что из любой формулы производной можно получить выражение для соответствующей первообразной, как это было сделано для функций $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \cos x$. Так были получены все первообразные, которые занесены в таблицу первообразных учебника.

Домашнее задание. п.13, примеры 1 и 3, № 189 (3), 190 (2), 191 (1). С помощью дифференцирования проверить строки 1–5 в таблице первообразных.

Цель третьего урока: изучение физического смысла первообразной.

Комментарии. Начинается урок с самостоятельной работы, задания которой записаны на доске или проектируются на экран. Учащиеся пользуются таблицей первообразных из учебника.

Самостоятельная работа

Запишите какую-нибудь первообразную для функции $f(x)$, если:

1) $f(x) = -1$;
2) $f(x) = x$;
3) $f(x) = x^6$;
4) $f(x) = 5^x$;
5) $f(x) = e^{3x}$;
6) $f(x) = \frac{4}{\cos^2 4x}$, $0 < x < \frac{\pi}{4}$;
7) $f(x) = x^3 - 2x + 2$;
8) $f(x) = \frac{2}{x}$, $x > 0$;
9) $f(x) = \frac{1}{x \ln 3}$, $x < 0$;
10) $f(x) = \sin 2x$.

Ответы к самостоятельной работе

1. $-x$; 2. $\frac{x^2}{2}$; 3. $\frac{x^7}{7}$; 4. $\frac{x^4}{4} - x^2 + 2x$; 5. $\frac{1}{3}e^{3x}$; 6. $\mathrm{tg}4x$; 7. $\frac{5^x}{\ln 5}$; 8. $2\ln x$;
9. $\log_3(-x)$; 10. $-\frac{1}{2}\cos 2x$.

После обсуждения полученных результатов проверяется домашняя работа.

Затем обсуждаются № 199, 201, 209, в которых речь идет о физическом смысле первообразной.

В № 199 скорость движения является производной от пути, значит, $S(t)$ – первообразная от скорости $v(t) = \sin 2t \cos 2t = 0{,}5\sin 4t$,

$$S(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\left(-\cos 4t\right) + C = -\frac{\cos 4t}{8} + C.$$

Для определения постоянной C используем второе условие задачи, а именно, что $S\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$, т.е. $-\frac{\cos \pi}{8} + C = 2,\ \frac{1}{8} + C = 2,\ C = 1\frac{7}{8}$.

Ответ: $S(t) = -\frac{\cos 4t}{8} + 1\frac{7}{8}$.

№ 201. Р е ш е н и е. Из курса физики надо знать, что импульс тела равен произведению его массы и скорости. Кроме того, физический смысл второй производной заключается в том, что ускорение тела – производная его скорости, а значит, скорость $v(t)$ – первообразная от ускорения $a(t) = t^2 - 2t + 2$, следовательно, $v(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + 2t + C$. Для определения числа C воспользуемся тем, что в начале движения скорость тела была равна 1 м/с, значит, $v(0) = 1$, $C = 1$. Таким образом, $v(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 + 2t + 1$, $v(3) = \frac{27}{3} - 9 + 2 \cdot 3 + 1 = 7$ (м/с). Наконец, находим $2 \cdot 7 = 14$ (кг·м/с).

Ответ: 14 кг·м/с.

№ 209. Р е ш е н и е. Длина уклона равна приращению $S(t)$, т.е. $S(20) - S(0)$. Запишем решение в виде интеграла:

$$\int_0^{20} v(t)dt = \int_0^{20}(15+0{,}2t)dt = (15t+0{,}1t^2)\Big|_0^{20} = 300+40=340\,(\text{м}).$$ *Ответ*: 340 м.

Домашнее задание. п.13, № 200. Найдите площади фигур, изображенных на рисунках 91-92 (в зависимости от уровня класса указывается конкретные фигуры).

Цель четвертого урока: формирование умений школьников строить графики первообразных по графикам функций и, наоборот, по графикам функций строить графики первообразных, находить с помощью интеграла средние значения функции.

Комментарии. Начать урок можно с проведения теста.

Тест

1. Укажите первообразную функции $f(x) = x + \cos x$.

А. $F(x) = x^2 + \cos x;$ **В.** $F(x) = \frac{x^2}{2} - \sin x;$

Б. $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x;$ **Г.** $F(x) = 2 - \cos x$.

2. Найдите первообразную функции $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$ на промежутке $(0;+\infty)$.

А. $F(x) = 2 - \frac{1}{x^2};$ **В.** $F(x) = x^2 - \frac{1}{x^2};$

Б. $F(x) = x^2 + \ln x;$ **Г.** $F(x) = 2x + \ln x$.

3. Для каких функций функция $F(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ является первообразной?

А. $f(x) = 6(x^2 - 1);$ **В.** $q(x) = 6x(x - 1);$

Б. $g(x) = 6x^2 - 6x + 1;$ **Г.** $p(x) = \frac{x^4}{8} - \frac{x^3}{9} + x$.

4. Укажите первообразную функции $f(x) = \sin 2x - 1$, график которой проходит через точку $(0;-1)$.

А. $F(x) = 2\cos 2x - 3;$ **В.** $F(x) = 2\cos 2x - x - 3;$

Б. $F(x) = -\frac{1}{2}\cos 2x - x + 0{,}5;$ **Г.** $F(x) = \frac{1}{2}\cos 2x - x - 1{,}5.$

5. Найдите площадь криволинейной трапеции $\int_0^4 \sqrt{x}dx$.

А. $\frac{16}{3}$; **Б.** $\frac{1}{4}$; **В.** 12; **Г.** 2.

Ответы к тесту: 1. Б. **2.** В. **3.** В. **4.** Г. **5.** А.

После проверки теста и домашней работы ученикам предлагаются задания № 187, 188. Учитель демонстрирует рисунки из учебника. Учащиеся могут выходить к доске и изображать цветным мелом свои варианты, которые затем анализируются классом. В тетрадях школьники самостоятельно выполняют задания 4 из этих номеров, используя два цвета. Проверка правильности их выполнения проводится с помощью боковых крыльев доски.

В № 187 школьники встречаются с уже знакомой ситуацией (№ 49 из п.5, с.43) – построением графика производной по графику функции. Рисунок учебника перерисовывается в тетрадь, а требуемый график строится в той же системе координат другим цветом. Приведем возможные рисунки (рис. 25).

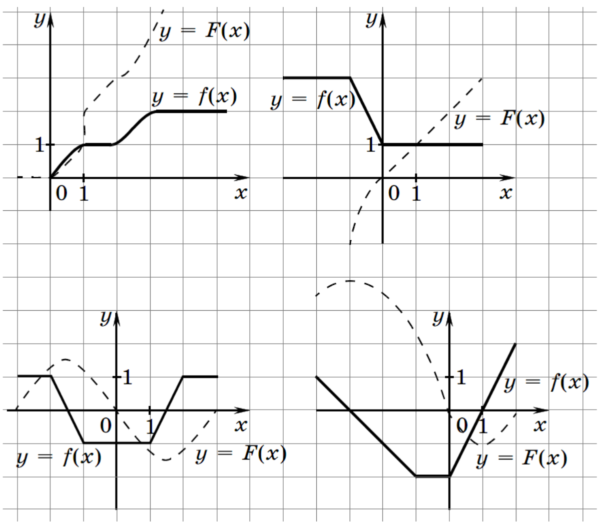


Рис. 25

В № 188 построение графика первообразной следует начинать из начала координат. При этом необходимо учитывать, что на промежутках, где данный график прямолинеен и параллелен оси абсцисс, график первообразной прямолинеен, а на промежутках, где данный график прямолинеен, но не параллелен оси абсцисс, график первообразной представляет собой части парабол.

Затем обсуждается план решения № 196 (2). Нужно найти общий вид первообразных для функции $f(x)$ и выяснить, при каком значении C (*постоянной интегрирования*) она касается прямой $g(x)$. При этом координаты точки касания можно найти, приравняв $f(x)$ угловому коэффициенту касательной. После обсуждения школьники самостоятельно выполняют это задание.

№ 196 (2). Р е ш е н и е. $2x^2 = 2$, $x^2 = 1$, $x = \pm 1$. Координаты точек касания $(-1; -1)$ и $(1; 3)$ – значит, нужно рассмотреть два случая:

1) $F(-1) = -1$ и 2) $F(1) = 3$.

$F(x) = \frac{2x^3}{3} + C$. 1) $\frac{2(-1)^3}{3} + C = -1$, $C = -\frac{1}{3}$; 2) $\frac{2}{3} + C = 3$, $C = 2\frac{1}{3}$.

Ответ: $F(x)=\frac{2x^3}{3}-\frac{1}{3}$ или $F(x)=\frac{2x^3}{3}+2\frac{1}{3}$.

После этого выполняется № 197. Обсуждение ведется до появления на доске схематического рисунка 26, а самостоятельное решение – до записи площади с помощью интегралов:

$$S=\int_{-2}^{2}(8-2x^2)dx,\ S_1=\int_{-1}^{1,5}(3+x-2x^2)dx,\ S_2=S-S_1.$$

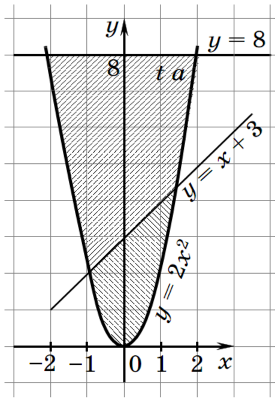


Рис. 26

Урок можно завершить обсуждением № 206. Это простое задание, в котором нужно просто подставить данные значения в формулу:

$$\mu=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}k\sin t dt=-\frac{k}{\pi}\cos t\Big|_0^{\pi}=\frac{k}{\pi}+\frac{k}{\pi}=\frac{2k}{\pi}\approx 0{,}64k.$$ *Ответ*: $0{,}64k$.

Домашнее задание. п.13, № 191 (4), 198, 202 (2).

Цель пятого урока: формирование умения школьников преобразовывать подинтегральную функцию и вычислять объем тела вращения.

Комментарии. Начинается урок с самостоятельной работы по двум вариантам на оценку.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y=\frac{1}{x}$ и $y=0{,}25$.

2. Найдите путь, пройденный телом за первые 3 с после начала движения, если скорость изменяется по закону $v(t)=\frac{1}{\sqrt{1+t}}$ (м/с).

Вариант 2

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2x$, $y=\frac{2}{x}$ и $x = 3$.

2. Найдите путь, пройденный телом за первые 5 с движения, если скорость изменяется по закону $v(t)=\sqrt{t+4}$ (м/с).

Ответы к самостоятельной работе

Вариант 1. 1. $\ln 4 - \dfrac{7}{12}$. **2.** 2 м. **Вариант 2. 1.** 8–2ln3. **2.** $12\dfrac{2}{3}$ м.

После самостоятельной работы обсуждаются результаты домашней работы. В № 191 (4) ученики должны были преобразовать выражение, задающее данную функцию:

$$\frac{x^2}{1+x} = \frac{x^2-1+1}{1+x} = \frac{x^2-1}{1+x} + \frac{1}{x+1} = x-1+\frac{1}{x+1}.$$

Заметим, что при выполнении схематического рисунка к данному заданию, достаточно указать на то, что значения функции $\dfrac{x^2}{1+x}$ положительные на промежутке [1; 2], откуда следует, что фигура, площадь которой требуется найти, является криволинейной трапецией.

$$S = \int_1^2 \left(x-1+\frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \right)\Bigg|_1^2 = \ln 3 - \ln 2 + \frac{1}{2} = \ln 1{,}5 + 0{,}5.$$

Идея предварительного преобразования функции $f(x)$ встретится школьникам и в № 193 (4). С понижением степени при решении тригонометрических уравнений учащиеся встречались в 10 классе. При этом использовалась формула: $\cos^2 \alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

Получаем: $F(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{1}{2}\sin 2x \right) + C = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4} + C$.

Затем школьникам предлагаются задания на вычисление объемов тел вращения. Сначала повторяется формула из примера 2 предыдущего пункта. После этого школьники работают с заданием № 203(1), в котором самостоятельно строят криволинейную трапецию и делают вывод о том, чем является соответствующее тело вращения. Это прямой круговой конус с высотой 4 и радиусом основания 8. Найдем объем конуса как тела вращения:

$$V = \pi \int_0^4 (2x)^2\, dx = \frac{4\pi x^3}{3}\Bigg|_0^4 = 85\frac{1}{3}\pi.$$

После этой задачи фронтально решается № 204. Главный в о п р о с: *«Как задать функцию, график которой ограничивает криволинейную трапецию сверху?»* Это линейная функция вида $y = kx$, график которой проходит через точку с координатами (H; R). $R = kH$, $k = \dfrac{R}{H}$, $y = \dfrac{R}{H}x$.

$$V = \pi \int_0^H \left(\frac{R}{H}x \right)^2 dx = \frac{\pi R^2 x^3}{3H^2}\Bigg|_0^H = \frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

После получения формулы объема конуса можно вывести формулу объема шара в №205. Следует обратить внимание школьников на возможность использования симметрии относительно оси ординат (центр круга помещается в начало координат).

$$V = 2\pi\int_0^R \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = 2\pi\int_0^R \left(R^2 - x^2\right)dx = 2\pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = 2\pi\left(R^3 - \frac{1}{3}R^3\right) = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Домашнее задание. п.13, № 190 (4), 195 (1), 203 (2).

Цель шестого урока: закрепление материала пункта.

Комментарии. В начале урока обсуждается домашняя работа.

В № 190 (4) используется формула понижения степени выражения, стоящего под знаком интеграла: $\int_0^{\pi} 2\sin^2\frac{x}{2}dx = \int_0^{\pi}(1-\cos x)dx = (x - \sin x)\Big|_0^{\pi} = \pi.$

В № 195 (1) учащиеся заметят, что функция $f(x)$ выступает в роли первообразной функции $f'(x)$. Эту первообразную можно рассматривать или на промежутке (–∞; 0), или на промежутке (0; +∞). Поскольку абсцисса точки *B* положительна, выбираем второй промежуток.

$$f(x) = \frac{4}{3}x^3 + 9x^{-1} + C,\ \frac{4}{3}\cdot 27 + 9\cdot\frac{1}{3} + C = -2,\ C = -41.$$

$$f(x) = \frac{4}{3}x^3 + 9x^{-1} - 41.$$

Однако в задании нигде не сказано, что $f(x)$ – это первообразная, а значит, она может быть определена и на обоих промежутках и даже на всей числовой оси. Таким образом, функцию $f(x)$ можно задать кусочно: $f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x^3 + 9x^{-1} + C_1, при\ x < 0, \\ C_2, при\ x = 0, \\ \frac{4}{3}x^3 + 9x^{-1} - 41, при\ x > 0. \end{cases}$ Здесь C_1 и C_2 могут быть любыми числами.

В № 203 (2) телом вращения является усеченный конус с высотой 4 и радиусами оснований 2 и 6 (рис. 27).

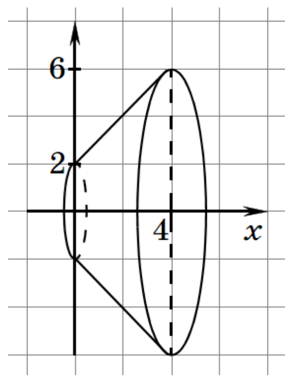


Рис. 27

$$V = \pi\int_0^4 (x+2)^2 dx = \pi\int_0^4 (x^2+4x+4)^2 dx = \pi\left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x\right)\Bigg|_0^4 = \pi(21\frac{1}{3} + 32 + 16) = 69\frac{1}{3}\pi.$$

Полезно получить это значение объема по формуле объема усеченного конуса: $V = \frac{\pi}{3}h(R^2 + r^2 + Rr)$. $V = \frac{\pi}{3} \cdot 4 \cdot (36 + 4 + 12) = 69\frac{1}{3}\pi$.

Затем на уроке рассматривается задача 207.

№ 207. Р е ш е н и е. Искомое тело вращения состоит из двух равных конусов, высота каждого из которых равна половине основания треугольника. Пусть основание треугольника равно $2x$, где $0 < x < 0{,}5p$, тогда его высота, равная радиусу оснований упомянутых конусов. Отсюда получаем: $\sqrt{(p-x)^2 - x^2} = \sqrt{p^2 - 2px}$.

Искомый объем $V(x) = 2 \cdot \frac{\pi x}{3}(p^2 - 2px) = \frac{2\pi}{3}(p^2x - 2px^2)$.

Наибольшее значение квадратный трехчлен $p^2x - 2px^2$ имеет при $x = \frac{p}{4}$. Значит, наибольший объем данного тела равен $V(x) = \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{p}{4}(p^2 - \frac{p^2}{2}) = \frac{\pi p^3}{12}$.

Ответ: $\frac{\pi p^3}{12}$.

Поскольку на следующем уроке школьники будут сдавать зачет или писать контрольную работу, оставшуюся часть урока можно посвятить обсуждению задач, оказавшихся трудными для учеников.

Домашнее задание. п.13, контрольные вопросы и задания к пункту.

Зачет по теме "Интеграл и первообразная"

Инструкция к проведению зачета

Зачет проводится по двум вариантам заданий, которые могут быть записаны на доске или на карточках. Ученики, первыми выполнившие все задания, подходят с работой к учителю. Учитель проверяет работу и задает по ходу проверки теоретические вопросы. Ученики, которые правильно решили все задания и ответили на вопросы учителя, считаются сдавшими зачет и становятся консультантами, которым выдается таблица и список устных вопросов и заданий. Из списка вопросов и заданий помощник задаст один вопрос и оценит ответ на него, также как и все задания знаком "+", если ответ или решение верно или знаком "–", если задание не выполнено или выполнено неверно. Остальные ученики могут сдать зачет учителю или консультанту. Учитель просматривает таблицы у консультантов, видит общую картину сдачи зачета, оказывает индивидуальную помощь ученикам.

№	Фамилия И.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.										
2.										

Напомним, что ученики, которым не удалось на этом уроке сдать зачет (т.е. ответить на удовлетворительную оценку) будут сдавать зачет учителю на следующих уроках, переменах или после уроков.

Задания для письменной части зачета

Вариант 1

1. Найдите общий вид первообразных функции $f(x)=x^7-2\sin x$.

2. Для функции $f(x)=\dfrac{3}{\cos^2\dfrac{x}{2}}$, заданной на промежутке (0; π), найдите первообразную, график которой проходит через точку $A\left(\dfrac{\pi}{2};4\right)$.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\dfrac{2}{x}$, $y=3-x$.

4. Пусть $F(x)$ – та из первообразных функции $f(x) = 4x - 1$, график которой имеет с графиком функции $f(x)$ общую точку на оси ординат. Найдите все общие точки графиков функций $f(x)$ и $F(x)$.

Вариант 2

1. Найдите общий вид первообразных функции $f(x)=x^5+3\cos x$.

2. Для функции $f(x)=\dfrac{2}{\sin^2 2x}$, заданной на промежутке $(0;\dfrac{\pi}{2})$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $B\left(\dfrac{\pi}{8};3\right)$.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\dfrac{3}{x}$, $y=4-x$.

4. Пусть $F(x)$ – та из первообразных функции $f(x) = 2x + 3$, график которой имеет с графиком функции $f(x)$ общую точку на оси ординат. Найдите все общие точки графиков функций $f(x)$ и $F(x)$.

Ответы к зачету

Вариант 1. 1. $\dfrac{x^8}{8}+2\cos x+C.$ **2.** $F(x)=6\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-2.$ **3.** 1,5 – 2ln2. **4.** (0; –1) и (2,5; 9).

Вариант 2. 1. 1. $F(x)=\dfrac{x^6}{6}+3\sin x+C.$ **2.** $F(x) = 4 - \operatorname{ctg}2x$. **3.** 4 – 3ln3. **4.** (0; 3) и (–1; 1).

Задания и вопросы к устной части зачета

1. Дайте определение криволинейной трапеции. Сделайте рисунок.
2. Что такое интегральная сумма, интеграл, границы интегрирования?
3. Запишите формулу площади криволинейной трапеции.
4. Какие условия должны выполняться, чтобы площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, можно было выразить

интегралом $\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx$?

5. Запишите формулу объема тела вращения.

6. Выразите с помощью интеграла объем конуса, который получается в результате вращения прямоугольного треугольника с катетами 3 и 1 вокруг меньшего катета.

7. Выразите с помощью интеграла объем шара с радиусом 1.

8. Какую функцию называют первообразной? Приведите пример функции и ее первообразной.

9. Сформулируйте правила нахождения первообразной.

10. Как проверить, является ли функция $F(x)$ первообразной для функции $f(x)$.

11. Расскажите, как найти первообразную, график которой проходит через данную точку.

12. Чем должна являться область определения первообразной?

13. Запишите с помощью интеграла площадь круга с радиусом 4.

14. Как найти закон движения тела, если известен закон изменения скорости?

Контрольная работа № 5
Тема "Интеграл и первообразная"

Вариант 1

I *уровень*

В заданиях 1–5 укажите номер ответа, который вы считаете верным.

1. Скорость точки, движущейся прямолинейно по оси OX, выражается формулой $v(t)=-2t+1$. Укажите зависимость координаты точки x от времени t, если в начальный момент времени точка находилась в начале координат.

А. $x = t^2 + 1$; **В.** $x = -t^2 + t$;
Б. $x = -t^2 + t + 1$; **Г.** $x = -2t^2 + t$.

2. Найдите первообразную функции $f(x)=5^x-3$.

А. $F(x)=\dfrac{5^x}{\ln 5}-3x;$ **В.** $F(x)=5^{x-1}-3;$

Б. $F(x)=5^x\ln 5-3x;$ **Г.** $F(x)=\dfrac{5^x}{\ln 5}-3$.

3. Найдите первообразную функции $f(x)=\dfrac{1}{x}$ на промежутке $(-\infty;0)$.

А. $F(x)=\ln x;$ **Б.** $F(x)=\ln(-x);$ **В.** $F(x)=-\ln(-x);$ **Г.** $F(x)=-\dfrac{1}{x^2}$.

4. Найдите первообразную функции $f(x) = \sin 2x$, график которой проходит через точку $(0;-1)$.

А. $F(x)=-0{,}5\cos 2x+1{,}5;$ **Б.** $F(x)=-0{,}5\cos 2x-0{,}5$;
В. $F(x)=\cos 2x-2$; **Г.** $F(x)=-2\cos 2x+1$.

5. Вычислите площадь фигуры, изображенной на рисунке 28.

А. $\frac{2}{3}$;

Б. $\frac{2}{3\ln 3}+\frac{1}{6}$;

В. $\frac{2}{\ln 3}-\frac{1}{3}$;

Г. $\frac{2}{3\ln 3}-\frac{1}{6}$.

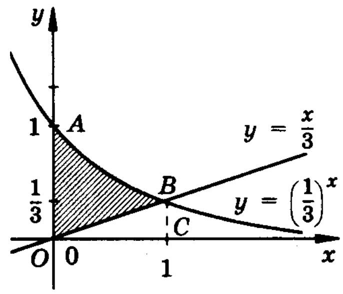


Рис. 28

II *уровень*

6. Найдите абсциссы точек, касательные в которых к графику первообразной для функции $y=\frac{\cos x}{\sqrt{4-x^2}}$ перпендикулярны оси ординат.

7. Найдите объём тела, образованного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной графиком функции $y=2+3x$, осями координат и прямой $x = 2$.

III *уровень*

8. При каком положительном значении b прямая x=6 делит фигуру, ограниченную линиями $y=\frac{1}{x}$, $y=0$, $x=4$, $x=b+6$, на две равновеликие части?

Вариант 2

I *уровень*

В заданиях 1–5 укажите номер ответа, который вы считаете верным.

1. Скорость точки, движущейся по оси OX, выражается формулой $v(t)=3t-1$. Укажите зависимость координаты точки x от времени t, если в начальный момент времени точка находилась в начале координат.

А. $x = 1{,}5t^2 - t$; **В.** $x = 1{,}5t^2 - 1$;

Б. $x = 3t^2 - t + 1$; **Г.** $x = 3t^2 - t$.

2. Найдите первообразную функции $f(x)=e^x+12$.

А. $F(x)=e^x$; **В.** $F(x)=e^x+6x^2$;

Б. $F(x) = e^{x-1}$; **Г.** $F(x)=e^x+12$.

3. Найдите первообразную функции $f(x) = \cos 4x$, график которой проходит через точку $(0;-1)$.

А. $F(x)=0{,}25\sin 4x-1$; **В.** $F(x)=-0{,}25\sin 4x-1$;

Б. $F(x)=\sin 4x-1$; **Г.** $F(x)=-4\sin 4x+5$.

4. Найдите первообразную функции $f(x)=|x|$ на промежутке $(-\infty;0)$.

А. $F(x)=\dfrac{x^2}{2}$; **В.** $F(x) = 1$;

Б. $F(x) = -\dfrac{x^2}{2}$; **Г.** $F(x) = -1$.

5. Вычислите площадь фигуры, изображенной на рисунке 29.

А. $\ln\frac{1}{2}+\frac{7}{24}$;

Б. $\frac{1}{3}+\ln\frac{1}{2}$;

В. $\ln 2+\frac{7}{24}$;

Г. $\ln 2-\frac{7}{24}$.

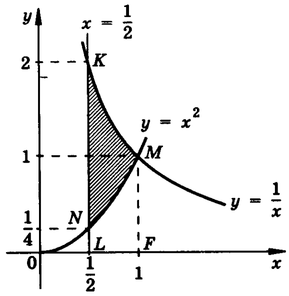


Рис. 29

II *уровень*

6. Найдите абсциссы точек, касательные в которых к графику первообразной функции $y = \dfrac{\sin x}{\sqrt{16-x^2}}$, перпендикулярны оси ординат.

7. Выразите с помощью интеграла и найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной графиком функции $y = 10-3x$, осями координат и прямой $x = 2$.

III *уровень*

8. При каком положительном значении b прямая $x = 10$ делит фигуру, ограниченную линиями $y=\dfrac{1}{x}$, $y=0$, $x=6$, $x=b+10$, на две равновеликие части?

Ответы к контрольной работе

Вариант 1. 1. В. **2.** А. **3.** Б. **4.** Б. **5.** Г. **6.** $\pm\dfrac{\pi}{2}$. **7.** 56. **8.** 3.

Вариант 2. 1. А. **2.** В. **3.** Б. **4.** А. **5.** Г. **6.** 0, $\pm\pi$. **7.** 104. **8.** $6\dfrac{2}{3}$.

ГЛАВА 5
ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И СТАТИСТИКИ

Пятая глава завершает линию комбинаторики, вероятности и статистики старшей школы. В главе два пункта. Один посвящен вероятности, а второй – статистике.

14. Вероятность суммы и произведения событий (4 ч)

В пункте 14 школьники знакомятся с новыми для них понятиями произведения и суммы событий, несовместными, независимыми и противоположными событиями, условной вероятностью, а также с формулами, позволяющими находить вероятности суммы и произведения событий. Вместе с этим, новым материалом учащиеся должны будут восстановить свои умения решать задачи на вычисление вероятностей различных событий, с непосредственным использованием классической схемы. Последнее особенно актуально в связи с предстоящим выпускным экзаменом за курс средней (полной) общеобразовательной школы. Если по той или иной причине при изучении главы ощущается дефицит времени, часть материала можно предложить школьникам для самостоятельного знакомства. С этой целью в учебнике приведены подробные решения практически всех заданий главы.

Предметные результаты обучения: приводить примеры противоположных событий, зависимых и независимых событий; использовать при решении задач свойства вероятностей противоположных событий; записывать формулы вероятности суммы и произведения событий; решать задачи на вычисление вероятности суммы и произведения событий.

Метапредметные результаты обучения: представлять информацию в виде таблиц, круговых и столбчатых диаграмм, в том числе с помощью компьютерных программ; применять знания по комбинаторике и вероятности в реальной жизни.

Цель первого урока: повторение понятий вероятности, исходов события, равновероятных исходов, благоприятных исходов и др.

Комментарии. На уроке должен озвучиваться схематический план нахождения вероятности с последующей конкретизацией при решении каждой задачи. Ученик сначала говорит о том, что если событие A может произойти в результате некоторого опыта все n исходов которого равновероятны, то сначала находим число n всех этих исходов, затем число m

тех из них, при которых произойдет событие A, и, наконец, вычисляем вероятность события A, равную отношению m к n.

Непосредственным счетом шаров решается № 214. Учитель может либо сам составить аналогичные несложные задачи, либо взять их из материалов открытого банка заданий ЕГЭ, либо использовать учебник 10 класса.

З а д а ч а 1. Какова вероятность того, что при 5 бросаниях монеты она 3 раза упадет гербом вверх?

Р е ш е н и е. Сначала по правилу произведения находим число равновероятных исходов: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$. Затем находим число благоприятных исходов, т.е исходов в которых из пяти бросков в трех сверху оказывается герб. (Здесь следует напомнить названия и определения комбинаций (перестановки, размещения и сочетания) изученных в предшествующих классах, а соответствующие формулы вывесить на видном месте класса.) Поскольку порядок, в котором появлялись гербы, не важен, число таких исходов является числом сочетаний из пяти по три: $C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2} = 10$. И, наконец, искомая вероятность равна $\frac{10}{32}$.

Ответ: $\frac{10}{32}$.

К числу задач, в которых ученикам помогут формулы комбинаторики относится задача из учебника для 10 класса.

З а д а ч а 2. Из колоды в 36 карт случайным образом вынимают 6 карт. Найдите вероятность того, что среди этих 6 карт будет: 1) только один туз; 2) хотя бы один туз; 3) все 4 туза, 4) хотя бы одна бубна.

Р е ш е н и е. Можно считать, что все 6 карт вынимают одновременно. Тогда в этой комбинации карт порядок можно не учитывать, т.е. мы имеем дело с сочетаниями. Число n равновероятных исходов при этом равно C_{36}^6.

1) Как составить шестерку карт, чтобы в ней оказался единственный туз? Можно сначала выбрать этого туза из имеющихся в колоде четырех, а затем добрать 5 карт из колоды, в которой без тузов окажется 32 карты. По правилу произведения получаем:

$$m = C_4^1 \cdot C_{32}^5 = 4C_{32}^5 \ . \ P(A) = \frac{4C_{32}^5}{C_{36}^6} = \frac{4 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 \cdot 31} \approx 0{,}4 .$$

2) Сколько существует шестерок карт, в которых есть хотя бы один туз? Понятно, что эти шестерки вместе с теми шестерками, в которых нет ни

одного туза – это все возможные шестерки карт. Найдем, сколько можно составить шестерок без тузов. Такие шестерки набирают из уже знакомой колоды, в которой после изъятия тузов осталось 32 карты, т.е. таких шестерок карт C_{32}^6. Теперь найдем ответ на вопрос задания: $m = C_{36}^6 - C_{32}^6$,

$$P(A) = \frac{C_{36}^6 - C_{32}^6}{C_{36}^6} = 1 - \frac{C_{32}^6}{C_{36}^6} \approx 1 - 0,46 = 0,54.$$

Следует обратить внимание школьников на то, что события, одно из которых заключается в том, что в выбранной шестерке есть хотя бы один туз, а другое – в том, что в ней нет ни одного туза, противоположны друг другу и их вероятности в сумме дают 1, как в этой задаче и получилось. Полезно здесь же ввести обозначение $\overline{A}$ для события противоположного событию A и записать $P(A) + P(\overline{A}) = 1$. Затем продолжить решение задачи.

3) Если в шестерке карт все 4 туза, то добрать остается всего две карты.

$m = C_{32}^2$. $P(A) = \dfrac{C_{32}^2}{C_{36}^6} \approx 0,0003$.

Ответ: 1) 0,4; 2) 0,54; 3) 0,0003.

Обсуждение условий и решений задач на повторение классической схемы полностью занимает весь этот урок.

Домашнее задание. п.14. Найти в Интернете открытый банк заданий ЕГЭ и решить задачи по теории вероятностей. Выписать по три задачи, которые решить не удалось.

Цель второго урока: формирование понятий произведения и суммы событий, несовместных событий и условной вероятности событий; формирование умения пользоваться формулами вероятности произведения и суммы событий.

Комментарии. В начале урока обсуждается задача 1 и текст учебника до формулы вероятности произведения событий включительно. Затем фронтально предлагается решить № 212. В этом номере сначала следует ответить на вопросы задачи с помощью непосредственного рассмотрения благоприятных случаев, а затем записать соответствующие события с помощью введенных при рассмотрении задачи 1 обозначений для произведения событий, отрицания события и условной вероятности. Так, в № 212 (3) получим $P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, а в № 212 (4) нужно найти вероятность того, что событие B не произойдет при условии, что не произошло событие A, т.е. нужно найти $P(\overline{B}/\overline{A})=\frac{2}{3}$, поскольку среди трех чисел, не меньших, чем 4, есть два составных числа – это 4 и 6. Можно дополнительно предложить описать события $\overline{A}\,\overline{B}, A/\overline{B}, \overline{A}/B$ и найти их вероятности.

Затем со школьниками рассматривается материал, посвященный сумме событий, включая понятие несовместных событий. После разбора задачи 2 устно решается № 213. Затем сначала фронтально с записью в тетрадях, а потом и на доске выполняется № 215 (можно рассмотреть только часть заданий, а остальные предложить для домашней работы).

Завершает урок обсуждение условий задач № 216, 218–221. Решать эти задачи школьники будут на следующем уроке, а здесь они должны научиться видеть, в каком случае речь идет о вероятности произведения, в каком – суммы событий, а в каком – об условной вероятности. Так, например, в № 216 (1) выигрыш не менее 10 р. складывается из событий: выигрыш 10 р., выигрыш 15 р. и выигрыш 20 р. Это же событие можно рассматривать как противоположное сумме событий: отсутствие выигрыша и выигрыш 2 р. А в № 216 (2) речь идет о вероятности выигрыша 10 р. при условии, что билет выигрышный. В № 218 речь идет об условной вероятности, а в № 219 о произведениях событий. В № 220 искомое событие является суммой событий, которые заключаются в вытаскивании: 1) белого шара из первой урны и черного шара из второй, 2) черного шара из первой и белого шара из второй урны. В задании № 221 (3) можно говорить о событии, противоположном сумме несовместных событий № 221 (1, 2).

С произведением и суммой событий связаны некоторые задачи открытого банка заданий ЕГЭ.

З а д а ч а. В волшебной стране погода бывает только хорошая или прекрасная, при этом погода, установившаяся утром в течение дня не меняется. Известно, что на следующий день погода остается такой же с вероятностью 0,6. Пусть 7 марта в волшебной стране стоит прекрасная погода, какова вероятность, что 10 марта погода там будет хорошей?

Р е ш е н и е. Благоприятное событие складывается из четырех несовместных событий, которые мы запишем в таблицу.

Число марта	8	9	10
1)	П (неизменна)	П (неизменна)	Х (изменилась)
2)	П (неизменна)	Х (изменилась)	Х (неизменна)
3)	Х (изменилась)	П (изменилась)	Х (изменилась)
4)	Х (изменилась)	Х (неизменна)	Х (неизменна)

Заметим, что вероятность изменения погоды равна 1 – 0,6 = 0,4.

В первой строчке таблицы 8 марта погода не изменяется, вероятность чего равна 0,6. Вероятность того, что при этом условии 9 марта погода не изменится равна 0,6 · 0,6 = 0,36. Вероятность, что при этом 10 марта погода изменится равна 0,36 · 0,4 = 0,144. Такова вероятность того, что 10 марта погода будет хорошей при условии, что 8 и 9 марта погода будет прекрасной. Аналогично для второй строчки – 0,6 · 0,4 · 0,6, третьей строчки – 0,4 · 0,4 · 0,4 и для четвертой – 0,4 · 0,6 · 0,6. Сумма вероятностей равна 3 · 0,144 + 0,064 = 0,496. *Ответ*: 0,496.

Домашнее задание. п.14, № 215, 218.

Цель третьего урока: формирование понятия независимых событий и умения решать задачи на вычисление вероятностей.

Комментарии. В начале урока следует проверить домашнее выполнение № 215, в процессе чего повторить понятия произведения и суммы событий.

Затем по учебнику рассматривается задача 3, в которой вводится понятие независимых событий. После этого фронтально решаются задачи № 216, 217, 219—221. При работе с № 216 полезно обозначить события, которые могут произойти при покупке билета лотереи следующим образом:

$Б_0$ – билет без выигрыша, $Б_в$ – выигрышный билет,

$Б_2$, $Б_5$, $Б_{10}$, $Б_{15}$, $Б_{20}$ – билет, выигравший соответственно 2, 5, 10, 15, 20 р.

После этого выписываются упомянутые события и вычисляются их вероятности с учетом равных возможностей вытащить любой из всех 100 лотерейных билетов.

1) $Б_{10} + Б_{15} + Б_{20}$. События несовместны, поэтому

$$P(Б_{10} + Б_{15} + Б_{20}) = P(Б_{10}) + P(Б_{15}) + P(Б_{20}) = \frac{15}{100} + \frac{10}{100} + \frac{5}{100} = 0,3.$$

2) $P(Б_{10}/ (Б_5 + Б_{10} + Б_{15} + Б_{20})) = \dfrac{15}{25+15+10+5} = \dfrac{3}{11}$. *Ответ*: $\dfrac{3}{11}$.

Домашнее задание. п.14, № 222.

Цель четвертого урока: научить школьников вычислять вероятность того или иного исхода серии одинаковых испытаний.

Комментарии. С вычислением вероятности того или иного исхода серии одинаковых испытаний школьники знакомятся, рассматривая по учебнику задачу 4. На уроке после обсуждения домашнего задания продолжается решение задач пункта № 223—233. Следует сначала фронтально обсудить условия задач, выработать план решения, а затем предложить школьникам самостоятельно записать соответствующее выражение и в несложных случаях вычислить искомую вероятность. Решения большинства задач учебника имеются в его справочном разделе. Исключением является задача № 233, решение которой рассмотрим ниже.

№ 233. Р е ш е н и е. После выбора играющим одного из трех ящичков вероятность того, что приз в выбранном ящике равна $\frac{1}{3}$, а вероятность того, что его там нет, равна $\frac{2}{3}$. Поскольку ведущий знает, в каком ящичке приз, то он во всех случаях откроет пустой ящичек. При этом не изменится вероятность нахождения приза в ящичке, выбранном играющим. Значит, с вероятностью $\frac{2}{3}$ приз находится в оставшемся ящичке, т.е., изменив свой первоначальный выбор, играющий в 2 раза увеличивает шансы на выигрыш.

Домашнее задание. п.14, контрольные вопросы и задания к пункту, разобрать материал в п.15 до задачи 3.

15. Понятие о статистике (4 ч)

Целью данного пункта является знакомство школьников с некоторыми понятиями, которые применяются в статистике. Поскольку материал рассматривается в ознакомительном плане, целесообразно увеличить долю самостоятельной работы школьников с учебником, предлагая им познакомиться дома с той частью параграфа, которую предполагается рассмотреть на уроке.

Предметные результаты обучения: находить среднее арифметическое, медиану и моду числовых рядов; приводить содержательные примеры использования средних значений и математического ожидания для описания данных.

Метапредметные результаты обучения: представлять информацию в виде таблиц, круговых и столбчатых диаграмм; использовать таблицы данных и средние показатели рядов в реальной жизни.

Цель первого урока: знакомство со средними характеристиками рядов данных и формирование умения определять, какая из них лучше характеризует тот или иной ряд данных.

Комментарии. К этому уроку ученики должны были прочитать текст учебника до задачи 3. Начать урок можно с беседы о статистике, в процессе которой ученики расскажут, как они понимают, что такое статистика и зачем вообще она нужна. Здесь можно поговорить о необходимости статистической информации в торговле, производстве, медицине, на транспорте и т.п.

Затем рассматриваются задачи, аналогичные задачам 1 и 2, но на материале из классного журнала, при этом учителю следует заранее выбрать фамилии учеников. Ряды отметок выписываются на доске, и с классом проводится обсуждение итоговых оценок. Школьники должны использовать термины: «средний балл, т.е. среднее арифметическое отметок», «ранжированный ряд», «мода ряда», «медиана ряда», «размах ряда».

После обработки нескольких строчек с оценками из классного журнала можно приступить к выполнению заданий №234, 235 и 237 из учебника.

Домашнее задание. п.15, чтение учебника до задачи 4, № 236.

Цель второго урока: формирование умения школьников находить средние характеристики рядов данных при решении задач.

Комментарии. После проверки и обсуждения выполненного дома № 236 по учебнику с классом разбирается задача 3. При обсуждении этой задачи обращается внимание на возможности представления информации в форме диаграмм. Диаграммы встречались школьникам в наших учебниках для 6 и 8 классов. Здесь следует подчеркнуть удобство использования процентов, а также преимущество гистограмм (от греческого слова "гисто" – столбик) в случаях сравнения.

После обсуждения выполняется № 238. В этом номере по оси ординат отмечается количество женщин, а по оси абсцисс размеры их верхней одежды. Отвечая на вопрос о числе женщин, участвовавших в опросе, ученики обычно называют число 12 – самое большое число, указанное на оси ординат. Следует добиться понимания школьниками, что 12 – высота самого высокого столбика, т.е. оно показывает, что 12 из всех опрошенных женщин носят 42 размер. Полезно предложить школьникам заполнить таблицу. С целью экономии времени достаточно начертить таблицу на доске и заполнять ее по предложениям школьников.

Размер одежды	42	44	46	48	50	52	54	56	58
Кол-во женщин	1	2	6	12	11	7	6	4	1

После этого учащиеся не должны испытать затруднений при подсчете числа опрошенных: 1 + 2 + 6 + 12 + 11 + 7 + 6 + 4 + 1 = 50.

Сразу было ясно, что мода ряда данных равна 48, так как наибольшее число женщин носило 48 размер. Этот ответ легко было получить и непосредственно по гистограмме. Также по гистограмме видно, что размах ряда равен 16.

Таблица представляет собой ранжированный ряд чисел: число 42 в нем стоит на первом месте, 44 – на втором и на третьем местах, затем шесть раз подряд число 46 и т.д. В середине этого ряда на 25-ом и на 26-ом местах оказалось одно и то же число 50 – оно и является медианой.

Несколько более трудоемким является вычисление среднего арифметического, т.е. среднего размера женской одежды.

$$\frac{42+44\cdot 2+46\cdot 6+48\cdot 12+50\cdot 11+52\cdot 7+54\cdot 6+56\cdot 4+58}{50}=$$

$$=\frac{42+88+276+576+550+364+324+224+58}{50}=\frac{2502}{50}\approx 50\,.$$

После получения ответов на все вопросы задания следует предложить школьникам подумать, где могла бы понадобиться статистическая информация о распространенности того или иного размера женской одежды.

В завершение урока можно предложить учащимся построить гистограмму размеров женской обуви по результатам исследования, приведенным в № 240. Сначала следует обсудить план выполнения задания: составить и заполнить таблицу, а затем полученные результаты отобразить на гистограмме.

Для заполнения таблицы нужно определить, какие размеры обуви представлены в данных [от 22,5 до 26 через 0,5]. Затем школьники чертят таблицу и заполняют ее, считая встречающиеся размеры, сначала 22,5, затем

23 и т.д.

Размер обуви	22,5	23	23,5	24	24,5	25	25,5	26
Кол-во женщин	3	5	12	13	9	5	2	1

После заполнения таблицы изображается диаграмма, у которой по оси абсцисс указываются размеры обуви, а по оси ординат – количество женщин, которые носят соответствующий размер (рис. 30).

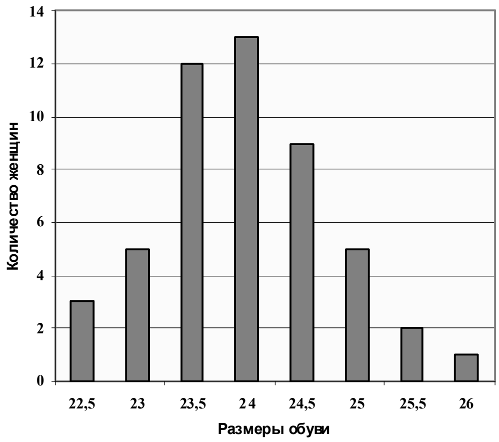


Рис. 30

Домашнее задание. п.15, аналогичную работу проделать с размерами обуви мужчин и ответить на вопросы задачи № 240, решить № 242, прочитать задачу 4.

Цель третьего урока: закрепление умений школьников решать задачи на вычисление средних характеристик ряда данных.

Комментарии. После обсуждения результатов домашней работы по учебнику разбирается задача 4, в которой указываются количество ламп, продолжительность работы которых находится внутри достаточно широких (300 часов) интервалов.

В учебнике рассматривается "оптимистическая" оценка средней продолжительности работы лампы. После разбора решения задачи 4 по учебнику можно предложить школьникам найти среднюю продолжительность работы лампы, исходя из того, что все лампы, попавшие в тот или иной временной промежуток, проработали время, равное среднему арифметическому границ промежутка, т.е. в первом промежутке 150 ч, во втором 450 ч, и т.д. Получится:

$150 \cdot 0{,}265 + 450 \cdot 0{,}205 + 750 \cdot 0{,}150 + 1050 \cdot 0{,}110 + \ldots + 2850 \cdot 0{,}015 +$
$+ 3150 \cdot 0{,}010 \approx 871{,}5$ (ч).

Затем школьники выполняют № 243, 244. Задача № 243 аналогична задаче 4, только вместо ламп речь идет о баскетболистах, а вместо продолжительностей работы ламп – числе попаданий баскетболистами в корзину в серии из 10 бросков. Желательно, чтобы школьники имели возможность использовать калькуляторы, в том числе, которые имеются в смартфонах и большинстве мобильных телефонов.

Домашнее задание. п.20, № 241, 246.

Цель четвертого урока: формируется понятие математического ожидания.

Комментарии. После сравнения и обсуждения результатов домашнего выполнения № 246 следует снова вернуться к задаче 4 и обратить внимание школьников на то, что при увеличении числа испытываемых ламп, частота той или иной продолжительности работы ламп будет изменяться, однако, чем большее количество ламп испытывать, тем меньше будут эти изменения. Можно сказать, что при увеличении числа испытываемых ламп частоты тех или иных результатов (имеется ввиду попадание продолжительности работы лампы в некоторый интервал) будут стремиться к вероятностям этих результатов. Интонационно следует выделить и предложить школьникам записать в тетрадях вывод: *при увеличении числа испытаний частота того или иного результата стремится к его вероятности.*

Как ответ на вопрос о том, к чему при этом будет стремиться среднее арифметическое результатов, вводится определение *математического ожидания*.

Если испытание может дать лишь один из конечного множества результатов, причем вероятности результатов известны, то можно ожидать, что средний результат в серии таких испытаний будет близок к сумме произведений результатов на их вероятности. Эту сумму называют *математическим ожиданием.* Следует подчеркнуть, что это понятие применяется в тех случаях, когда вероятности всех возможных результатов испытаний известны или могут быть вычислены.

В тетради школьники записывают определение математического ожидания: «*Сумму произведений возможных результатов испытания на их вероятности называют математическим ожиданием»*.

После этого фронтально разбирается №247 (записи на доске делает учитель). В отличие от спортивных мишеней, в которых есть различные зоны, дающие при попадании в них разное число очков, в данной задаче считают не очки, а попадания: попал в мишень – 1, не попал – 0.

Составляется сумма произведений для вычисления математического ожидания числа попаданий в мишень всеми солдатами:

$$(1 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}6 + 1 \cdot 0{,}6) + (1 \cdot 0{,}5 + 1 \cdot 0{,}5) +$$
$$+ (1 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}3 + 1 \cdot 0{,}3) = 5 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 0{,}3 = 4{,}9.$$

Обсуждая полученный результат, следует обратить внимание на невозможность попасть в мишень 4,9 раза. Школьникам следует предложить высказать гипотезу о том, какой результат можно действительно ожидать в описанной ситуации. Понятно, что это 5 попаданий.

После обсуждения этой задачи школьникам предлагается обсудить план решения и самостоятельно решить № 248. Сначала школьники называют все возможные при бросании двух игральных костей суммы очков, а затем заносят их в верхнюю строку таблицы, во второй строке указывают, сколько есть вариантов получения данного результата, а в третьей строке – вероятность результата с учетом того, что всего при бросании двух костей есть 36 равновероятных исходов. И, наконец, заполнив таблицу можно вычислить математическое ожидание результата. Основную часть работы школьники выполняют самостоятельно, но учитель, наблюдая за их работой на местах, может привлечь внимание класса к тому или иному этапу работы, разобрав его на доске.

Сумма очков	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Число вариантов	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1
Вероятность	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Вычисляется математическое ожидание:

$$\frac{2\cdot 1+3\cdot 2+4\cdot 3+5\cdot 4+6\cdot 5+7\cdot 6+8\cdot 5+9\cdot 4+10\cdot 3+11\cdot 2+12\cdot 1}{36}=\frac{252}{36}=7\,.$$

Завершить урок можно рассмотрением найденных в соответствии с заданием № 246 статистических данных. Полезно также подготовить к этому уроку доклады, используя информацию из Интернета.

Домашнее задание. п.15, Задача 4, контрольные вопросы и задания к пункту.

Зачет по теме "Элементы теории вероятностей и статистики"

Инструкция к проведению зачета

Зачет проводится по двум вариантам заданий, которые могут быть записаны на доске или на карточках. Ученики, первыми выполнившие все задания, подходят с работой к учителю. Учитель проверяет работу и задает по ходу проверки теоретические вопросы. Ученики, которые правильно решили все задания и ответили на вопросы учителя, считаются сдавшими зачет и становятся консультантами, которым выдается таблица и список устных вопросов и заданий. Из списка вопросов и заданий помощник задаст один вопрос и оценит ответ на него, также как и все задания знаком "+", если ответ или решение верно или знаком "–", если задание не выполнено или выполнено неверно. Остальные ученики могут сдать зачет учителю или консультанту. Учитель просматривает таблицы у консультантов, видит общую картину сдачи зачета, оказывает индивидуальную помощь ученикам.

№	Фамилия И.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.										
2.										

Напомним, что ученики, которым не удалось на этом уроке сдать зачет (т.е. ответить на удовлетворительную оценку) будут сдавать зачет учителю на следующих уроках, переменах или после уроков.

Задания для письменной части зачета

Вариант 1

1. В одном мешке находится 3 красных и 2 синих шара, в другом мешке – 2 красных и 3 синих. Из каждого мешка наугад вынимают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся красными?

2. Среди 20 книг, стоящих на книжной полке, 8 детективов. В темноте с полки наугад берется сначала одна, а затем вторая книга. Какова вероятность того, что обе эти книги окажутся детективами?

3. Среднесуточная переработка сахара (в тыс. ц) сахарными заводами некоторого региона представлена следующими данными: 13,1; 12,7; 13,2; 13,4; 12,7; 13,4; 12,7; 13,2; 13,5; 13,4; 12,7 .

Найдите: а) среднее арифметическое; б) моду; в) размах; г) медиану этого ряда данных.

4. В ряду данных, состоящем из 12 разных чисел, наибольшее число увеличили на 6. Изменятся ли при этом и, если изменятся, то как: а) среднее арифметическое; б) размах; в) медиана?

Вариант 2

1. На одной полке стоит 12 книг, две из которых – сборники стихов, а на другой – 15 книг, три из которых – сборники стихов. Наугад берут с каждой полки по одной книге. Какова вероятность того, что обе книги окажутся сборниками стихов?

2. Из мешка, в котором 5 белых и 10 черных бильярдных шаров, наугад вынимают сначала один, а затем другой шар. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми?

3. На сайте некоторой организации ведут ежедневный учет посещений. В течении девяти дней получили такой ряд данных: 153, 158, 153, 160, 158, 160, 160, 153, 160.

Найдите: а) среднее арифметическое; б) моду; в) размах; г) медиану этого ряда данных.

4. В ряду данных, состоящем из 15 разных чисел, наименьшее число уменьшили на 5. Изменятся ли при этом и как: а) среднее арифметическое; б) размах; в) медиана?

Ответы к письменной части зачета

Вариант 1. 1. 0,24. **2.** $\frac{14}{95}$**. 3.** а) $13\frac{1}{11}$**;** б) 12,7; в) 0,8; г) 13,2. **4.** а) Увеличится на 0,5; б) увеличится на 6; в) нет**.**

Вариант 2. 1. $\frac{1}{30}$. **2.** $\frac{2}{21}$**. 3.** а) $157\frac{2}{9}$; б) 160; в) 7; г) 158**. 4.** а) Уменьшится на $\frac{1}{3}$; б) увеличится на 5; в) нет.

Задания и вопросы к устной части зачета

1. Как вы понимаете, что такое сумма событий? Объясните на конкретном примере. Запишите формулу вероятности суммы событий.

2. Что называют произведением событий *A* и *B*? Объясните на конкретном примере.

4. Что называют условной вероятностью? Как вычислить условную вероятность? Объясните на конкретном примере.

5. Приведите пример несовместных событий. Чему равна вероятность суммы несовместных событий?

6. Приведите пример независимых событий. Как найти вероятность произведения независимых событий?

7. Пусть событие C состоит в наступлении хотя бы одного из двух несовместных событий A и B. Как найти в этом случае вероятность события C?

8. Известно, что событие C состоит в том, что произойдут два независимых события A и B. Как найти вероятность события C?

9. Приведите пример двух противоположных событий. Чему равна сумма вероятностей двух противоположных событий?

10. Объясните равенство $P(AB) = P(BA)$.

11. Как называются события A и B, если:

1) $P(B/A) = P(B)$;

2) $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$;

3) $P(A + B) = P(A) + P(B)$?

12. Что изучает статистика? Какие средние характеристики рядов данных вы знаете?.

13. Что называют средним арифметическим ряда чисел? Как найти среднее арифметическое? Может ли среднее арифметическое ряда чисел не совпадать ни с одним из этих чисел?

14. Что значит, "ранжировать ряд данных"? Ранжированный ли это ряд чисел: 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5? Чему равен размах этого ряда?

15. Что называют медианой ряда чисел?

16. Что называют модой ряда? Может ли ряд чисел иметь более одной моды? Может ли мода ряда чисел не совпадать ни с одним из чисел ряда?

17. Чему равна мода ряда чисел: 1, 2, 3, 2, 4, 2? Чему равен размах этого ряда?

В зависимости от уровня изучения материала, учитель может дополнить список вопросов.

ГЛАВА 6
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Имеется два соображения, по которым тема «Комплексные числа» завершает наш курс алгебры и начала математического анализа.

Во-первых, до знакомства школьников с комплексными числами не нужно было при формулировке различных утверждений и задач специально оговаривать, что речь в них идет о действительных числах. В противном случае, пришлось бы, например, говорить, что квадратное уравнение с отрицательным дискриминантом не имеет действительных корней. Понятно, что это излишне загромождало бы рассуждения.

Во-вторых, рассмотрение материала главы можно проводить на ознакомительном уровне, что высвободит запланированное на изучение комплексных чисел время для повторения востребованного на итоговой аттестации материала.

16. Формула корней кубического уравнения (1 ч)

В пункте школьники знакомятся с формулой корней кубического уравнения.

Предметные результаты обучения: решать кубические уравнения по формуле Кардано.

Метапредметные результаты обучения: составлять план выполнения заданий; понимать идеи расширения множества чисел.

Цель первого урока: изучение формулы Кардано.

Комментарии. Один из вариантов организации этого урока предполагает предварительное домашнее самостоятельное прочтение школьниками пункта 16 без выполнения упражнений, но с ответами на контрольные вопросы к пункту. Затем на уроке учитель сначала выслушивает ответы школьников на эти контрольные вопросы, а затем еще раз обращает внимание на ключевые моменты для выполнения заданий пункта.

Сначала рассматривается сама формула Кардано. Запоминать ее не нужно, но предполагается, что школьники смогут правильно определить конкретные значения p и q в кубическом уравнении, подставить их в формулу и провести вычисления, используя в случае необходимости микрокалькулятор. Достаточно рассмотреть с учениками № 249 (1, 2). На этом уроке ученики только знакомятся с проблемой, которая возникла при применении формулы Кардано, а как эту проблему решать – материал следующих уроков.

Рассмотрим выполнение заданий пункта.

№ 249. Это задание на прямое применение формулы Кардано. Вычисления в заданиях 1, 2 и 4 выполняются с помощью микрокалькулятора.

1) $x^3 + 6x + 2 = 0$. $p = 6$, $q = 2$,

$$x = \sqrt[3]{-1+\sqrt{1+8}} + \sqrt[3]{-1-\sqrt{1+8}} = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4} \approx -0{,}327.$$

2) $x^3 + 12x - 12 = 0$. $p = 12$, $q = -12$,

$$x = \sqrt[3]{6+\sqrt{36+64}} + \sqrt[3]{6-\sqrt{36+64}} = \sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{4} \approx 0{,}932.$$

3) $x^3 + 15x - 124 = 0$. $p = 15$, $q = -124$,

$$x = \sqrt[3]{62+\sqrt{62^2+5^3}} + \sqrt[3]{62-\sqrt{62^2+5^3}} =$$

$$= \sqrt[3]{62+63} + \sqrt[3]{62-63} = 5 - 1 = 4.$$

4) $x^3 + 5x - 84 = 0$. $p = 5$, $q = -84$,

$$x = \sqrt[3]{42+\sqrt{42^2+\left(\frac{5}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{42-\sqrt{42^2+\left(\frac{5}{3}\right)^3}} = 4.$$

17. Действия с комплексными числами (4 ч)

В этом пункте школьники знакомятся с понятиями мнимой единицы и компле́ксного числа. Учащиеся должны перенести навыки преобразования рациональных выражений на действия с комплексными числами – это позволит не изучать отдельно правила сложения, вычитания и деления комплексных чисел. Объем практики в действиях с комплексными числами определяется задачей формирования арифметических умений, а также усвоением понятия сопряженных комплексных чисел, которое требуется при делении.

Предметные результаты обучения: формулировать определение комплексного числа, определения равенства комплексных чисел, а также основную теорему алгебры; находить комплексные корни квадратных уравнений; показывать выполнимость теоремы Виета для комплексных корней квадратного уравнения; выполнять арифметические действия с комплексными числами, заданными в алгебраической форме.

Метапредметные результаты обучения: ставить цели учебной деятельности в целом и конкретного урока; планировать, выполнять и оценивать свое выполнение заданий.

Цель первого урока: формирование понятия комплексного числа, его представления в алгебраической форме и умений выполнять действия сложения, вычитания и умножения комплексных чисел.

Комментарии. Напомнив, что в формуле Кардано под квадратными корнями иногда появляются отрицательные числа, учитель предлагает рассмотреть более простые, чем кубические, квадратные уравнения. Проводится работа с учебником, в котором рассматривается уравнение $x^2 - 4x + 13 = 0$. После введения мнимой единицы i, определяется комплексное число и один из корней уравнения проверяется подстановкой в уравнение. Затем учащимся предлагается самостоятельно проверить второй корень, а затем и формулы Виета для комплексных корней. В процессе выполнения сложения и умножения чисел обращается внимание на сходство этих действий с преобразованием суммы и произведения двучленов. Когда школьники выполнят сложение и умножение корней, им можно предложить проверить свои действия по тексту учебника. По учебнику же фронтально разбираются сложение и умножение комплексных чисел в общем виде.

Затем выполняются задания из №250 (2–4), 252 (2), 257 (2). Перед самостоятельным выполнением школьниками этих заданий фронтально обсуждаются планы их решений.

Домашнее задание. п. 17, № 250 (1), 252 (1), № 253 (1), 257 (1).

Цель второго урока: формирование понятия сопряженного комплексного числа и умения выполнять деление комплексных чисел в алгебраической форме.

Комментарии. Начинается урок с проверки домашнего задания и устной фронтальной работы/

Устная работа

1. Решите уравнение:

а) $x^2 + 1 = 0$; б) $x^2 + 9 = 0$; в) $x^2 + 2 = 0$; г) $x^2 - x + 1 = 0$; д) $x^2 + x + 1 = 0$.

2. Выполните действия:

а) $(1 + i) + (3 - 2i)$; б) $(2 - 3i) - (1 - i)$; в) $(1 + 4i)(1 + i)$; г) $(1 + i)(1 - i)$.

3. Ответьте на вопросы.

1) Может ли сумма двух различных комплексных чисел быть действительным числом?

2) Может ли разность двух различных комплексных чисел быть действительным числом?

3) Может ли произведение двух различных комплексных чисел быть действительным числом?

После этого полезно сформулировать общие правила действий над комплексными числами, подтверждающие утвердительные ответы. Это задания из № 254 (1–3).

Затем по учебнику рассматриваются пример 1. В нем для получения в знаменателе дроби действительного числа его умножают на число, отличающееся только знаком мнимой части. Вводится определение и обозначение сопряженных чисел $z = c + di$ и $\bar{z} = c - di$. Ученикам предлагается выполнить следующее задание.

З а д а н и е. Назовите число, сопряженное комплексному числу:

1) $1 - i$; 2) $2 + i$; 3) $3 - 2i$; 4) $7 + \sqrt{2}i$; 5) $5 - 1{,}3i$; 6) $6 + \frac{2}{3}i$.

По учебнику рассматривается в общем виде деление одного комплексного числа на другое: $\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$.

Затем школьники самостоятельно (с проверкой на крыльях доски) выполняют задания № 253 (3–5).

После проверки рассматривается пример 2 и выполняется № 258 (2), в котором ученикам придется предварительно заменить i^5 и i^{11}, отщепляя от них по i^2: $i^5 = (i^2)(i^2)i = (-1)(-1)i = i$,

$i^5 = (i^2)(i^2)(i^2)(i^2)(i^2)i = (-1)(-1)(-1)(-1)(-1)i = -i$.

Домашнее задание. п. 17, № 253(6), 254 (4), 256 (1), 258 (1).

Цель третьего урока: формирование представлений об основной теореме алгебры многочленов и закрепление умений выполнять четыре арифметических действия с комплексными числами, представленными в алгебраической форме.

Комментарии. Начинается урок с проверки домашнего задания и устной работы.

Устная работа

1. Среди чисел: i^2; $-i$; $1+i$; $i+1$ назовите равные комплексные числа.
2. Назовите числа, сопряженные с комплексными числами:

$$3 - i;\ 5 + 2i;\ 1 - \sqrt{3}i;\ 9 + \frac{3}{7}i.$$

3. Выполните действия, т.е. приведите к виду $x + yi$:

а) $(3 + 2i) + (1{,}2 - 3i)$; в) $(1 + i)(2 - i)$; д) $\frac{1-\sqrt{7}i}{\sqrt{7}i}$;

б) $(1 - 4i) - (0{,}7 - 5i)$; г) $(2 + 3i) : i$; е) $\frac{2+i}{3-i}$.

В ходе фронтальной работы учащиеся выполняют задания и отвечают на в о п р о с ы.

1) Какое число называется комплексным?

2) Является ли действительное число комплексным?

3) Какие комплексные числа называют равными?

4) Какие комплексные числа называют сопряженными?

5) Как сложить два комплексных числа?

6) Запишите в общем виде формулу суммы двух комплексных чисел.

7) Как перемножить два комплексных числа?

8) Запишите в общем виде формулу произведения двух комплексных чисел.

9) Как найти частное двух комплексных чисел?

10) Запишите в общем виде формулу частного двух комплексных чисел.

По учебнику школьники знакомятся с основной теоремой алгебры многочленов, которую часто формулируют следующим образом: «Любой многочлен степени n имеет n комплексных корней». При этом имеют в виду, что некоторые корни могут совпадать. В нашем курсе ученики встретились со случаем совпадения корней, например, в связи с применением формул Виета к квадратным трехчленам с нулевым дискриминантом. При этом договорились считать, что соответствующее квадратное уравнение имеет один корень. Такая договоренность особенно важна при решении задач с параметрами.

Завершить урок можно упоминанием о теореме Безу, о которой говорится в дополнительном материале. Точнее речь идет о следствии из этой теоремы. В нашем курсе с использованием теоремы Безу и схемы Горнера школьники могли встретиться в 9 классе. Для тех учеников, кто этот материал не изучал или забыл можно показать достаточно простой способ решения уравнений № 251. Учитель показывает решение на доске, вовлекая в обсуждение учеников класса.

№ 251 (2). Р е ш е н и е. Сначала пробуем подобрать целый корень. Достаточно быстро школьники найдут корень –1. Значит, кубический многочлен можно разложить на множители, одним из которых является $x + 1$, получим $x^3 + 4x^2 + 8x + 5 = (x+1)(...)$. Во второй скобке должен стоять квадратный трехчлен $x^3 + 4x^2 + 8x + 5 = (x+1)(ax^2 + bx + c)$, тогда после раскрытия скобок получится многочлен третьей степени: $ax^3 + (a+b)x^2 + (b+c)x + c$. Сравнивая два равных выражения, получим: $a = 1$, $a+b = 4$, $c = 5$; $1+b = 4$; $b = 3$; $x^3 + 4x^2 + 8x + 5 = (x+1)(x^2 + 3x + 5)$.

Теперь можно найти еще два корня кубического многочлена, которые являются корнями квадратного трехчлена $x^2 + 3x + 5$.

$x_{1;2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{-11}}{2}=-\dfrac{3}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{11}}{2}$. *Ответ*: $-1, -\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{11}}{2}, -\dfrac{3}{2}-i\dfrac{\sqrt{11}}{2}$.

Этот материал следует рассматривать как дополнительный и предложить школьникам решать остальные задания из №251 по желанию.

Домашнее задание. п. 17, № 259 (1), 255 (4) и 251 по желанию.

Цель четвертого урока: закрепление материала пункта.

Комментарии. На уроке выполняются задания № 255 (1, 2), 256 (2), а также другие задания с комплексными числами, которые можно объединить в самостоятельную работу. Можно также предложить школьникам убедиться, что известные им законы арифметических действий (переместительный, сочетательный и распределительный) выполняются и для комплексных чисел.

Самостоятельная работа

Вариант 1

1. Запишите числа, сопряженные с числами: $-i$; $3-i$; $1+i\sqrt{3}$.

2. Выполните четыре арифметических действия с числами $z_1=2+i\sqrt{5}$ и $z_2=1-i\sqrt{5}$.

Вариант 2

1. Запишите числа, сопряженные с числами: i; $2+i$; $1-i\sqrt{2}$.

2. Выполните четыре арифметических действия с числами $z_1=1+i\sqrt{7}$ и $z_2=3-i\sqrt{7}$.

Домашнее задание. п. 17, № 255 (3), контрольные вопросы и задания к пункту.

КОММЕНТАРИИ И РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЙ ПУНКТА

№ 250. Поскольку независимо от знака дискриминанта квадратное уравнение имеет корни, можно сразу записывать формулу корней:

2) $x_{1,2}=7\pm\sqrt{49-74}=7\pm\sqrt{-25}=7\pm 5i$, $x_1=7-5i$ и $x_2=7+5i$;

3) $x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9-45}}{9}=\dfrac{3\pm\sqrt{-36}}{9}=\dfrac{1}{3}\pm\dfrac{2}{3}i$, $x_1=\dfrac{1}{3}-\dfrac{2}{3}i$, $x_2=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}i$;

4) $x_{1,2}=\dfrac{5\pm\sqrt{25-32}}{4}=\dfrac{5\pm\sqrt{-7}}{4}=\dfrac{5}{4}\pm\dfrac{\sqrt{7}}{4}i$, $x_1=\dfrac{5}{4}-\dfrac{\sqrt{7}}{4}i$, $x_2=\dfrac{5}{4}+\dfrac{\sqrt{7}}{4}i.$

№ 251. 1) $x_1 = 1$; $a = 1, -a + b = 1, -c = -3$; $-1 + b = 1$; $b = 2$; $c = 3$.
$x^3 + x^2 + x - 3 = (x - 1)(x^2 + 2x + 3)$, $x_{2;3} = 1 \pm i\sqrt{2}$. *Ответ*: 1; $1-i\sqrt{2}$; $1+i\sqrt{2}$.

3) $x_1 = 1$, $x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = (x - 1)(x^2 - 5x + 7)$, $x_{2;3} = \dfrac{5 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: 1; $\dfrac{5+i\sqrt{3}}{2}$; $\dfrac{5-i\sqrt{3}}{2}$.

4) $x_1 = 2$; $2x^3 - 7x^2 + 11x - 10 = (x - 2)(ax^2 + bx + c)$,
$a = 2$, $-2a+b = -7$, $-2c = -10$; $b = -3$, $c = 5$;
$2x^3 - 7x^2 + 11x - 10 = (x - 2)(2x^2 - 3x + 5)$, $x_{2;3} = \dfrac{3 \pm i\sqrt{31}}{4}$.

Ответ: 2; $\dfrac{3 \pm i\sqrt{31}}{4}$.

5) $x_1 = 3$; $4x^3 - 2x^2 - 27x - 9 = (x - 3)(4x^2 + 10x + 3)$, $x_{2;3} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{13}}{4}$.

Ответ: 3; $\dfrac{-5 \pm \sqrt{13}}{4}$.

№ 252. Будем составлять приведенные квадратные уравнения вида $x^2 + px + q = 0$.

1) $-p = (1 + i) + (1 - i) = 2$, $p = -2$; $q = (1 + i)(1 - i) = 1 - i^2 = 1 - (-1) = 2$; $x^2 - 2x + 2 = 0$.

2) $-p = (-3 + 4i) + (-3 - 4i) = -6$, $p = 6$; $q = (-3 + 4i)(-3 - 4i) = 9 - 16i^2 =$ $= 9 - 16\cdot(-1) = 25$; $x^2 + 6x + 25 = 0$.

№ 253. 1) $(3 - 2i)(i - 3) = 3i - 2i^2 - 9 + 6i = 9i - 2 \cdot (-1) - 9 = -7 + 9i$.

2) $(5 - 2i)(4 + 2i) = 20 + 2i - 4i^2 = 20 + 2i - 4 \cdot (-1) = 24 + 2i$.

3) $\dfrac{2}{1-i} = \dfrac{2(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{2(1+i)}{1-i^2} = \dfrac{2(1+i)}{2} = 1 + i.$

4) $\dfrac{5i}{3-4i} = \dfrac{5i(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \dfrac{5(3i+4i)}{9-16i^2} = \dfrac{5(3i-4)}{9+16} = \dfrac{5(3i-4)}{25} = -\dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}i.$

5) $\dfrac{2-5i}{1+i} = \dfrac{(2-5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{2-7i+5i^2}{1-i^2} = \dfrac{2-7i-5}{1+1} = \dfrac{-3-7i}{2} = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{7}{2}i.$

6) $\dfrac{3-4i}{1-3i} = \dfrac{(3-4i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \dfrac{3+5i-12i^2}{1-9i^2} = \dfrac{3+5i+12}{1+9} = \dfrac{15+5i}{10} = 1{,}5 + 0{,}5i.$

№ 254. Здесь имеется в виду, что комплексное число является действительным, если коэффициент при его мнимой части равен нулю. Рассматривая два мнимых числа (мнимые числа – это комплексные числа с ненулевым коэффициентом при мнимой части), получим искомые условия. Номер выполняется фронтально. На доске полезно представить формулы суммы, разности, произведения и частного чисел $a+bi$ и $c+di$.

1) Сумма комплексных чисел является действительным числом, когда коэффициенты при мнимых частях слагаемых противоположны.

2) Разность комплексных чисел является действительным числом, когда

коэффициенты при мнимых частях равны.

3) Произведение комплексных чисел является действительным числом, когда отношение действительных частей противоположно отношению коэффициентов при мнимых частях множителей, т.е. $bc = -ad$, $\frac{a}{c} = -\frac{b}{d}$.

4) Частное комплексных чисел является действительным числом, когда отношение действительных частей множителей равно отношению коэффициентов при их мнимых частях, т.е. $bc = ad$, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$.

Полезно затем обратить внимание школьников на то, что уже исходные числа могли оказаться действительными, и предложить им учесть это соображение при уточнении ответов к заданиям № 254 (3, 4).

№ 255. Задания 1 и 2 довольно трудоемки, поэтому в слабых классах их лучше не предлагать. Задания можно выполнить подстановкой указанного значения z в данный многочлен. При этом учитывается, что $i^3 = (i^2)i = -i$.

1) $(2 - 5i)^3 - 4(2 - 5i)^2 + 28(2 - 5i) =$
$=8 - 60i + 150i^2 - 125i^3 - 16 + 80i - 100i^2 + 56 - 140i = -2 + 5i$.

2) $(-3 + i)^3 + 7(-3 + i)^2 + 16(-3 + i) =$
$= i^3 - 9i^2 + 27i - 27 + 63 - 42i + 7i^2 - 48 + 16i = -10$.

3) $\frac{5-2i}{1+i} + \frac{5+2i}{1-i} = \frac{(5-2i)(1-i)}{1-i^2} + \frac{(5+2i)(1+i)}{1-i^2} =$
$\frac{5-7i+2i^2+5+7i+2i^2}{2} = 3.$

4) $\frac{10-6i}{1-3i} + \frac{10+6i}{1+3i} = \frac{(10-6i)(1+3i)}{1-9i^2} + \frac{(10+6i)(1-3i)}{1-9i^2} =$
$= \frac{10+24i-18i^2+10-24i-18i^2}{10} = 5{,}6.$

№ 256. Чтобы равенство выполнялось, должны быть равны и действительные, и мнимые части чисел. Записав обе части равенства в виде комплексных чисел, приравняем их действительные части, и приравняем коэффициенты при мнимых частях.

1) $a + (4a + b)i + 4bi^2 = 14 + 5i$, $(a - 4b) + (4a + b)i = 14 + 5i$.

$$\begin{cases} a - 4b = 14, \\ 4a + b = 5, \end{cases} \begin{cases} 17a = 34, \\ 4a + b = 5, \end{cases} \begin{cases} a = 2, \\ 8 + b = 5, \end{cases} a = 2,\ b = -3.$$

2) Освободимся от знаменателя.

$32 - i = (a + bi)(3 - 2i)$, $32 - i = 3a + 2b - (2a - 3b)i$. Получаем

$$\begin{cases} 3a + 2b = 32, \\ 2a - 3b = 1, \end{cases} \begin{cases} 9a + 6b = 96, \\ 4a - 6b = 2, \end{cases} \begin{cases} 3a + 2b = 32, \\ 13a = 98, \end{cases} \begin{cases} 3a + 2b = 32, \\ a = \frac{98}{13}, \end{cases} \quad b = 4\frac{9}{13}.$$

3) У школьников есть возможность показать, что они не зря занимались решением систем в главе 5. При решении системы $\begin{cases} ab = a^2 - 3, \\ 2 - ab = -b^2 \end{cases}$ они должны увидеть, что ее легко свести к однородной $\begin{cases} a^2 - ab = 3, \\ b^2 - ab = -2. \end{cases}$

$$\begin{cases} 2a^2 - 2ab = 6, \\ 3b^2 - 3ab = -6, \end{cases} \begin{cases} a^2 - ab = 3, \\ 3b^2 - 5ab + 2a^2 = 0. \end{cases}$$

Поскольку $a = 0$ не удовлетворяет первому уравнению системы, делением на a^2 ее второго уравнения получим квадратное уравнение $3z^2 - 5z + 2 = 0$, где $z = \frac{b}{a}$. Корни этого уравнения 1 и $\frac{2}{3}$. Возвращаясь к неизвестным a и b, получаем $\begin{cases} a^2 - ab = 3, \\ a = b \end{cases}$ или $\begin{cases} a^2 - ab = 3, \\ b = \frac{2}{3}a. \end{cases}$

Первая система не имеет решений, а из второй получаем $\begin{cases} a^2 = 9, \\ b = \frac{2}{3}a, \end{cases} \begin{cases} a = \pm 3, \\ b = \frac{2}{3}a. \end{cases}$ *Ответ*: $a = -3$, $b = -2$ или $a = 3$, $b = 2$.

№ 257. Идея решения та же, что и в предыдущем номере.

1) Сразу получаем систему:

$$\begin{cases} 4 = -\frac{7}{a} + 2b, \\ \frac{2}{a} - b = 3, \end{cases} \begin{cases} -\frac{7}{a} + 2b = 4, \\ \frac{4}{a} - 2b = 6, \end{cases} \begin{cases} -\frac{3}{a} = 10, \\ \frac{4}{a} - 2b = 6, \end{cases} \begin{cases} a = -0{,}3, \\ -\frac{40}{3} - 2b = 6. \end{cases}$$

Ответ: $a = -0{,}3$, $b = -9\frac{2}{3}$.

2) $\begin{cases} 2a = 7 - 2a - 3b, \\ 3a - 8 = 3a - 2b, \end{cases} \begin{cases} 4a = 7 - 12, \\ b = 4, \end{cases}$ $a = -\frac{5}{4}$, $b = 4$. О т в е т: $a = -\frac{5}{4}$, $b = 4$.

№ 258. Действительные части должны быть равны, а мнимые – противоположны.

1) Заменим $-\frac{7}{i}$ на $7i$ и составим систему

$$\begin{cases} x^2 - 5 = -y, \\ y + 7 = x^2 + 4, \end{cases} \begin{cases} x^2 - 5 = -1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Ответ: $x = \pm 2$, $y = 1$.

2) Заменим $-10xyi^5$ на $-10xyi$ и $20i^{11}$ на $-20i$. $i^{11} = (i^2)^5 i = (-1)^5 \cdot i = -i$.

Составим систему $\begin{cases} 9y^2 - 4 = 8y^2, \\ -10xy = -20, \end{cases} \begin{cases} y^2 = 4, \\ xy = 2. \end{cases}$

Ответ: $y = 2$, $x = 1$ или $y = -2$, $x = -1$.

№ 259. 1) $1 + i + i^2 + i^3 = 1 + i - 1 - i = 0$, что и требовалось доказать.

2) Сгруппируем слагаемые по четыре и вынесем в каждой группе за скобки степень i.

$i + i^2 + i^3 + \ldots + i^{99} + i^{100} =$

$= (i + i^2 + i^3 + i^4) + i^4(i + i^2 + i^3 + i^4) + i^8(i + i^2 + i^3 + i^4) + \ldots + i^{96}(i + i^2 + i^3 + i^4)$.

Поскольку $i + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 - i + 1 = 0$, во всех скобках оказались нули, а значит, вся сумма равна нулю, что и требовалось доказать.

Изучение нового материала курса 11 класса на этом завершается. В наших методических рекомендациях мы постарались по возможности сэкономить время выделяемое на общеразвивающий материал, который не является объектом итоговой аттестации за курс средней общеобразовательной школы. Это время следует использовать для целенаправленной подготовки к ЕГЭ.

Итоговая контрольная работа

Вариант 1

I *уровень*.

В заданиях 1–6 укажите букву ответа, который вы считаете правильным.

1. Найдите значение выражения $7\log_6\left(6^2\right)$.

А. 49; **Б.** 2^7; **В.** 14; **Г.** 9.

2. Найдите производную функции $y = x^5 + 1,5x + 8$.

А. $y' = x^4 + 1,5x + 8$; **В.** $y' = 5x^4 + 3x + 8$;

Б. $y' = 5x^4 + 1,5$; **Г.** $y' = 5x^4 + 1,5x$.

3. Найдите область определения функции $y = \log_5 \dfrac{x+3}{2-3x}$.

А. $(-\infty; 3)$; **В.** $\left(\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$;

Б. $(-\infty; -3) \cup \left(\dfrac{2}{3}; +\infty\right)$; **Г.** $\left(-3; \dfrac{2}{3}\right)$.

4. Решите уравнение $5^x = \dfrac{1}{\sqrt[4]{125}}$.

А. $-\dfrac{3}{4}$; **Б.** $\dfrac{3}{4}$; **В.** –4; **Г.** –3.

5. Найдите все первообразные функции $f(x) = 6x - 4^x - 2$.

А. $F(x) = 6 - 4^x\ln4 + C$; **В.** $F(x) = 3x^2 - \frac{4^x}{\ln 4} - 2x$;

Б. $F(x) = 6x^2 - 4^x\ln4 - 2x$; **Г.** $F(x) = 3x^2 - \frac{4^x}{\ln 4} - 2x + C$.

6. Вероятность выбить одним выстрелом не меньше 6 очков у спортсмена равна 0,5, а вероятность выбить больше 8 очков равна 0,1. Найдите вероятность выбить одним выстрелом не меньше 6, но не больше 8 очков.

А. 0,4; **Б.** 0,45; **В.** 0,4; **Г.** 0,05.

II *уровень*

7. Найдите значение выражения $4,5\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{9}, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi.$

8. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \frac{4}{x}$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$. Найдите координаты точки графика этой функции, касательная в которой параллельна найденной касательной.

9. Решите уравнение $4^{-x+0,5} - 7 \cdot 2^{-x} = 4.$

III *уровень*

10. Найдите отрицательное число, которое дает наименьшую разность со своим утроенным кубом.

Вариант 2

I *уровень*.

В заданиях 1–6 укажите букву ответа, который вы считаете правильным.

1. Найдите значение выражения $4\log_5\left(5^3\right)$.

А. 12; **Б.** 3^4; **В.** 64; **Г.** 7.

2. Найдите производную функции $y = 2x^6 - 2,5x - 3$.

А. $y' = 2x^5 - 2,5x - 3$; **В.** $y' = 12x^5 - 2,5$;

Б. $y' = 12x^5 - 2,5x$; **Г.** $y' = 12x^5 - 5x$.

3. Найдите область определения функции $y = \log_2 \frac{5x+2}{x-4}$.

А. $(-\infty; -0,4)$; **В.** $(4; +\infty)$;

Б. $(-\infty; -0,4) \cup (4; +\infty)$; **Г.** $(-0,4; 4)$.

4. Решите уравнение $3^{-x} = \frac{1}{\sqrt[5]{81}}$.

А. $-\frac{4}{5}$; **Б.** $\frac{4}{5}$; **В.** –5; **Г.** –4.

5. Найдите все первообразные функции $f(x) = 8x^3 + 3 - 5^x$.

А. $F(x) = 24x^2 - 5^x\ln5$; **В.** $F(x) = 2x^4 + 3x - \frac{5^x}{\ln 5}$;

Б. $F(x) = 8x^4 + 3x + \dfrac{5^x}{\ln 5}$; **Г.** $F(x) = 2x^4 + 3x - \dfrac{5^x}{\ln 5} + C$.

6. Спортсмен при выстреле выбивает не меньше 5 очков с вероятностью 0,8, а не меньше 8 очков с вероятностью 0,4. Какова вероятность, что, сделав один выстрел, он выбьет не меньше 5, но меньше 8 очков.

А. 0,4; **Б.** $\dfrac{5}{8}$; **В.** 0,48; **Г.** 0,32.

II *уровень*

7. Найдите значение выражения $2{,}5\cos\alpha$, если $\sin\alpha = -\dfrac{7}{25}, \pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

8. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x + e^{-2x}$, параллельной прямой $y = -x$.

9. Решите уравнение $3^{6x-3} = 2 \cdot 27^{x-\frac{2}{3}} + 1$.

III *уровень*

10. Найдите точку максимума функции $y = \sqrt[4]{-35 + 12x - x^2}$.

Ответы к итоговой контрольной работе

Вариант 1. 1. В. **2.** Б. **3.** Г. **4.** А. **5.** Г. **6.** Б. **7.** $-\dfrac{7}{9}$**.** **8.** $y = 2 - x$; (–2;–2). **9.** –2. **10.** $-\dfrac{1}{3}$**.**

Вариант 2. 1. А. **2.** В. **3.** Б. **4.** Б. **5.** Г. **6.** В. **7.** $-\dfrac{24}{25}$**. 8.** $y = 1 - x$. **9.** $\dfrac{2}{3}$**. 10.** 6.